

# 7

## LA GRAVITAZIONE DA KEPLERO A NEWTON

Il problema della gravitazione, a cui dedichiamo questo capitolo, occupa una parte consistente dei Principia di Newton, e non è lontano dalla verità affermare che ne costituisce la motivazione principale. Il punto di partenza è costituito dalle leggi di Keplero, che richiamiamo nel primo paragrafo. A questa base Newton aggiunge la dinamica, che abbiamo discusso nel capitolo 5, e formula la legge della *gravitazione universale*.

Il problema del moto in un campo di forze centrali, a cui dedichiamo il paragrafo 7.1, costituisce la prima applicazione. In questa discussione, seguendo Newton, affrontiamo sia il *problema diretto*, ossia calcolare le orbite dall'equazione di Newton assumendo nota la forza, sia il *problema inverso*, ossia calcolare le accelerazioni a partire dalle leggi di Keplero. Seguendo questa seconda linea si comprende come si possa attribuire il moto dei pianeti all'azione del Sole, e con un'ulteriore generalizzazione si prosegue fino ad enunciare la legge di gravitazione.

Una volta enunciata la legge ci si rende conto che il problema del moto planetario si è ampliato a dismisura: il modello del campo di forze centrali si rivela solo una prima approssimazione. Per descrivere correttamente la dinamica del sistema solare occorrerebbe tener conto delle forze mutue di attrazione tra tutti i pianeti, e questo è un problema estremamente complesso. Il solo caso in cui si possa trovare una soluzione completa è quello del *problema dei due corpi*, discusso nel paragrafo 7.2.

Il seguito della discussione costituisce un argomento troppo vasto, che non è possibile far rientrare in queste note: la *Meccanica Celeste* ed in particolare la *Teoria delle Perturbazioni Planetarie*, iniziata con i lavori di Eulero, Lagrange e Laplace a metà del secolo XVIII, è stata ampiamente sviluppata nei secoli successivi, ed ha dato origine a risultati di grande interesse. Le precessioni dei nodi e dei perielii delle orbite planetarie e le variazioni periodiche delle eccentricità e delle inclinazioni (Lagrange e poi Laplace); la spiegazione delle deviazioni dalle leggi di Keplero, particolarmente evidenti in Giove e Saturno (Laplace); la riscoperta di Cerere (Gauss); il ruolo delle risonanze nella dinamica degli asteroidi (Kirkwood); la scoperta di Nettuno come causa delle deviazioni

osservate nell'orbita di Urano (Leverrier e Adams); la scoperta degli asteroidi Troiani in librazione attorno ai punti di equilibrio lagrangiani del sistema Sole–Giove; la scoperta delle orbite asintotiche e della dinamica caotica (Poincaré); il teorema di esistenza di moti quasi-periodici (Kolmogorov, Arnold, Moser); la teoria della stabilità esponenziale (Nekhoroshev): sono, questi, solo alcuni dei risultati ottenuti da matematici ed astronomi sulla base del lavoro di Newton. Il lettore non mancherà di osservare che a questo elenco, concentrato sulla Meccanica Classica, dovremmo aggiungere almeno la teoria della *Relatività Generale*. Inoltre dovremmo ricordare anche le missioni spaziali, iniziate dopo il 1950 e diventate ormai frequenti, che non sarebbero mai state possibili senza la teoria sviluppata dai grandi matematici del passato.

## 7.1 Il moto in un campo di forze centrali

Il modello fisico più semplice che possiamo immaginare, ed anche il più prossimo allo schema di Keplero, è quello che vede il Sole fisso al centro dell'universo, ed un pianeta che si muove intorno ad esso.

Il problema può formularsi come segue:

*Un punto materiale  $P$  si muove nello spazio sotto l'azione di una forza che è sempre diretta come la congiungente il punto  $P$  con un centro fisso  $O$ . Si suppone che l'intensità della forza dipenda dalla sola distanza del punto  $P$  da  $O$ .*

### 7.1.1 Le leggi di Keplero

Ricordiamo anzitutto le tre leggi di Keplero.

- (i) Le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il sole occupa uno dei fuochi.
- (ii) Il raggio vettore che congiunge il pianeta col Sole spazza aree eguali in tempi eguali.
- (iii) I quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite.

La seconda legge viene enunciata brevemente anche dicendo che la velocità areolare è costante.

Le prime due leggi sono contenute nell'*Astronomia Nova*<sup>[28]</sup>, pubblicata nel 1609. La terza legge fu scoperta da Keplero nel 1618, e pubblicata in *Harmonices Mundi*<sup>[29]</sup> nel 1619.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Nel primo trattato Keplero affronta il problema, considerato come arduo da tutti gli astronomi, di determinare con metodi geometrici l'orbita di Marte. Dopo molti tentativi, accuratamente descritti nella sua opera, scopre le prime due leggi sostituendo l'ellisse agli epicicli e la legge delle aree all'equante di Tolomeo. Nel secondo trattato egli indaga l'armonia del cosmo prima riprendendo le relazioni tra gli orbi dei pianeti ed i cinque solidi platonici, già considerata nel *Mysterium Cosmographicum*, poi cercando di ricostruire l'armonia musicale del sistema planetario. In quest'ambito la terza legge costituisce uno dei punti forti del suo pensiero. Noi abbiamo rimosso praticamente tutto il contenuto dei trattati, mantenendo solo le tre leggi che in effetti costituiscono la parte

### 7.1.2 Conservazione del momento angolare, o legge delle aree

Prima di passare alla scrittura della Lagrangiana e delle equazioni di moto prendiamo in esame un risultato che segue direttamente dalla proposizione 5.1. Qui facciamo uso della sola ipotesi che la forza sia di tipo centrale, non necessariamente dipendente dalla sola distanza.

Denotiamo con  $m$  la massa del punto. Consideriamo poi un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro  $O$  delle forze, sicché denoteremo con  $\mathbf{x}$  la posizione del punto  $P$ . Consideriamo il momento della quantità di moto rispetto all'origine  $O$ , che denoteremo con  $\mathbf{\Gamma}$ .

**Proposizione 7.1:** *Per qualunque campo di forze centrali il momento angolare è una costante del moto.*

**Dimostrazione.** Per la proposizione 5.1, tenuto conto che l'origine  $O$  è fissa, si ha  $\dot{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{N} = 0$  perché  $\mathbf{N} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F} = 0$  essendo  $\mathbf{F}$  parallelo a  $\mathbf{x}$ . Q.E.D.

La conservazione del momento angolare ha due conseguenze notevoli. Anzitutto il momento angolare è costante in direzione, e questo implica che l'orbita debba essere piana; ciò giustifica parte della prima legge di Keplero, in quanto determina il piano in cui giace l'ellisse. In secondo luogo si conserva il modulo del momento angolare, e questo è connesso con la conservazione della velocità areolare affermata dalla seconda legge di Keplero.

Denotiamo con  $\mathcal{A}(t)$  l'area spazzata dal raggio vettore  $\mathbf{x}$  che congiunge il punto col centro delle forze.

**Proposizione 7.2:** *Sia dato un punto  $P$  che si muove nello spazio sotto l'azione di un campo di forze centrali. Allora:*

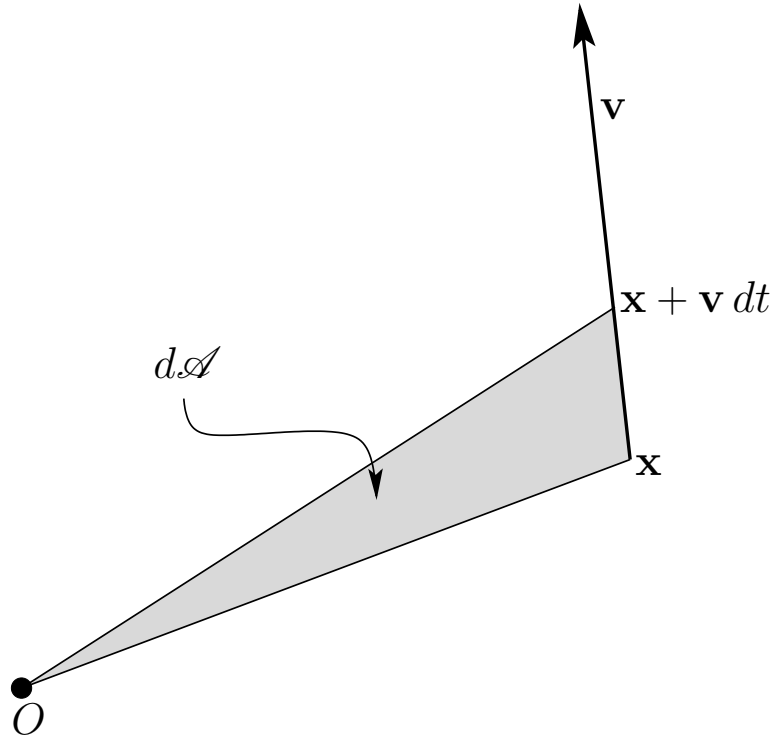
- (i) *se  $\mathbf{\Gamma} \neq 0$  allora l'orbita giace nel piano passante per il centro delle forze ed ortogonale al momento angolare  $\mathbf{\Gamma}$ ; se  $\mathbf{\Gamma} = 0$  allora l'orbita giace su una retta passante per l'origine.*
- (ii) *la velocità areolare è costante, ovvero  $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = C$ , dove  $C$  è detta costante delle aree.*

**Osservazione.** Nel caso di momento angolare nullo si parla di *orbita di collisione*, perché il punto muovendosi su una retta passante per il centro delle forze può precipitarvi se la forza è attrattiva o provenirne in caso di forza repulsiva. Non è detto però che la collisione avvenga in tempo finito: ciò dipende dalla forma del potenziale.

**Dimostrazione della proposizione 7.2.** (i) Ricordiamo che per definizione si ha  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}$ . Supponiamo anzitutto che sia  $\mathbf{\Gamma} \neq 0$ . Allora, per la definizione stessa di prodotto vettoriale, ogni vettore posizione del punto  $\mathbf{x}(t)$  sull'orbita deve essere

---

più feconda dell'opera di Keplero. Per inciso, gli "orbi" di cui parla Keplero sono le sfere celesti che nel modello aristotelico e tolemaico ruotavano intorno al centro dell'universo trascinando con sé i pianeti. L'introduzione di tali sfere risale ad Eudosso, che forse le pensava solo come strumenti geometrici utili per il calcolo. Nel modello aristotelico esse vennero interpretate come sfere reali, perfettamente trasparenti, e mosse da un complicato sistema di ingranaggi che comunicava agli orbi interni il moto del cielo delle stelle fisse.



**Figura 7.1.** Ad illustrazione della legge delle aree. L'area  $d\mathcal{A}$  spazzata dal raggio vettore in un tempo  $dt$  è  $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}\| dt$ , per la definizione stessa di prodotto vettoriale.

ortogonale a  $\mathbf{\Gamma}$ , come asserito. Se  $\mathbf{\Gamma} = 0$  allora in ogni punto dell'orbita si ha che  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{v}$  sono paralleli, e da qui si deduce immediatamente che il moto deve essere rettilineo, e che la retta che contiene l'orbita deve passare per l'origine.

(ii) Sia  $d\mathcal{A}$  l'area spazzata dal raggio vettore nell'intervallo di tempo  $dt$ . Osserviamo che nello stesso intervallo di tempo il punto  $P$  si sposta da  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{v} dt$  (si veda la figura 7.1). Per la definizione stessa di prodotto vettoriale si ha

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\mathbf{x} \wedge d\mathbf{x}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}\| dt = \frac{1}{2m}\|\mathbf{\Gamma}\| dt ,$$

da cui segue l'asserto con  $C = \frac{1}{2m}\|\mathbf{\Gamma}\|$ .

*Q.E.D.*

**Proposizione 7.3:** Se un punto si muove su un piano con velocità areolare costante rispetto ad un centro  $O$  allora l'accelerazione è diretta verso il centro  $O$ .

**Dimostrazione.** Si usa ancora la formula (si veda la figura 7.1)

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}\| = C .$$

Poiché il moto è piano, deve essere costante anche la direzione del vettore  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}$ , e dunque si ha  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{v} = C\mathbf{u}$  dove  $\mathbf{u}$  è un versore ortogonale al piano dell'orbita. Derivando rispetto al tempo si ottiene  $\frac{d}{dt}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} = 0$ , quindi i vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{x}$  devono essere paralleli.

*Q.E.D.*

### 7.1.3 Le equazioni del moto

Se facciamo uso delle coordinate cartesiane otteniamo subito la Lagrangiana

$$(7.1) \quad L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(r) , \quad r = \|\mathbf{x}\| .$$

Da questa ricaveremmo le equazioni di Newton che ben conosciamo, e che non sono comunque molto comode per il proseguimento del nostro studio.

È più conveniente tener conto della conservazione del momento angolare e della simmetria radiale del campo di forze. A tal fine scegliamo il riferimento cartesiano in modo che l'asse  $z$  sia diretto come il vettore momento angolare, sicché, per la proposizione 7.2, l'orbita giace nel piano  $x, y$ . Inoltre la simmetria radiale suggerisce spontaneamente di far uso delle coordinate polari, definite tramite la consueta trasformazione

$$x = r \cos \vartheta , \quad y = r \sin \vartheta .$$

La Lagrangiana assume così la forma

$$(7.2) \quad L(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 \right) - V(r) .$$

Lo spazio delle configurazioni è il piano privato dell'origine<sup>2</sup>, descritto dalle coordinate  $r \in (0, \infty)$  e  $\vartheta \in \mathbb{T}$ .

Si osserva immediatamente che la Lagrangiana è indipendente dalla coordinata  $\vartheta$ , e da qui si ricava subito che la quantità

$$(7.3) \quad p_{\vartheta} = mr^2 \dot{\vartheta}$$

è un integrale primo, perché l'equazione di Lagrange per  $\vartheta$  può scriversi semplicemente  $\frac{dp_{\vartheta}}{dt} = 0$ . L'equazione per  $r$  si scrive

$$(7.4) \quad ma_r + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 , \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 ,$$

dove  $a_r$  è la componente radiale dell'accelerazione, la sola non nulla.

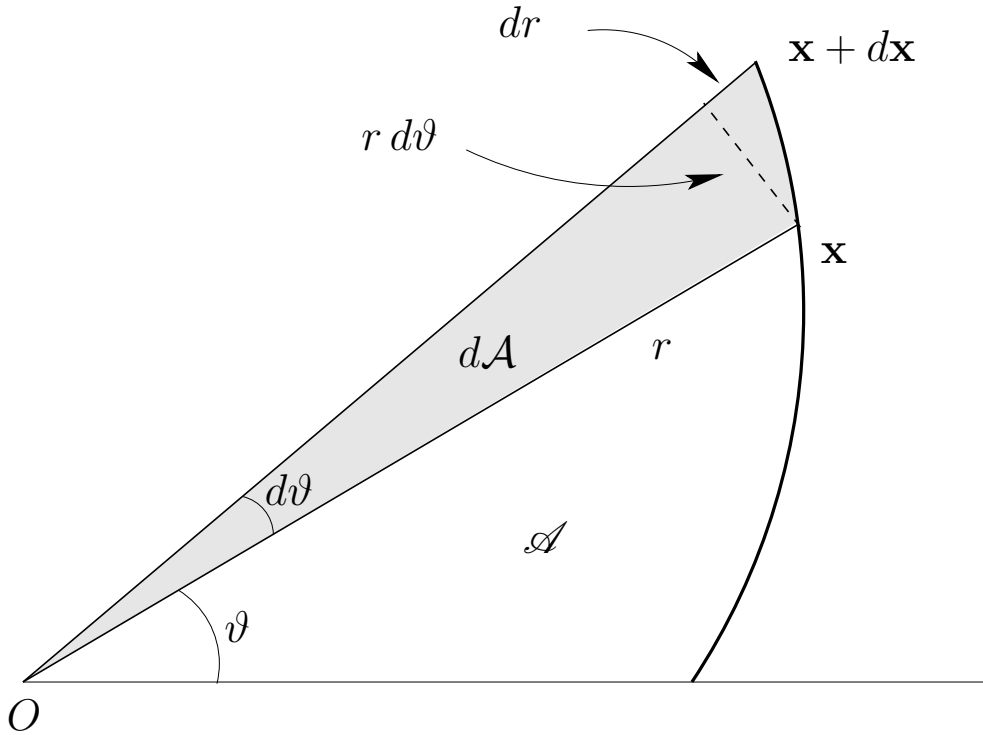
Soffermiamoci un momento sull'integrale primo  $p_{\vartheta}$ . Con qualche considerazione geometrica si vede che esso altro non è che il modulo del momento angolare al quale si aggiunge eventualmente un segno. Per convincersene basta guardare la figura 7.2, da cui si vede subito che vale  $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\vartheta}$ . Come abbiamo già messo in evidenza nelle proposizioni 7.2 e 7.3 questa quantità è proporzionale al momento angolare.

**Esercizio 7.1:** Verificare che la velocità e l'accelerazione possono scomporsi nelle loro componenti radiali e tangenti come

$$(7.5) \quad \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\vartheta}\mathbf{u}_{\vartheta} , \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})\mathbf{u}_{\vartheta} ,$$

---

<sup>2</sup> L'origine deve essere esclusa perché è un punto singolare per le coordinate polari: se  $r = 0$ , allora  $\vartheta$  è indefinito. Ciò non crea difficoltà salvo nel caso in cui un'orbita possa passare per l'origine. Ma in tal caso il momento angolare è nullo, e si ha un'orbita di collisione che deve essere studiata a parte.



**Figura 7.2.** Il calcolo della velocità areolare in coordinate polari: l'incremento dell'area è dato da  $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2 d\vartheta$ .

dove  $\mathbf{u}_r$  è un versore diretto come il raggio e  $\mathbf{u}_\vartheta$  un versore ortogonale al raggio. Suggerimento. Si scrivono i due versori come

$$\mathbf{u}_r = \cos \vartheta \mathbf{u}_x + \sin \vartheta \mathbf{u}_y, \quad \mathbf{u}_\vartheta = -\sin \vartheta \mathbf{u}_x + \cos \vartheta \mathbf{u}_y.$$

Poi si può procedere in due modi. (i) Con un calcolo diretto, derivando rispetto al tempo si trovano le relazioni  $\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\vartheta} \mathbf{u}_\vartheta$  e  $\dot{\mathbf{u}}_\vartheta = -\dot{\vartheta} \mathbf{u}_r$ . Si scrive poi  $\mathbf{x} = r \mathbf{u}_r$  e derivando rispetto al tempo si ricavano le (7.5). (ii) Ricorrendo allo schema lagrangiano si scrive  $\mathbf{x} = r \cos \vartheta \mathbf{u}_x + r \sin \vartheta \mathbf{u}_y$ , e si calcola  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \mathbf{u}_r$  e  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta} = r \mathbf{u}_\vartheta$ . Poi si ricorda che  $\mathbf{v} = \dot{r} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \dot{\vartheta} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta}$ , e da qui si ricava la scomposizione della velocità. Infine si ricava la scomposizione dell'accelerazione ricorrendo alla formula del binomio lagrangiano, lemma 6.4.

L'esercizio mostra come nei casi più semplici il calcolo diretto possa rendersi alquanto veloce. D'altra parte il formalismo di Lagrange ha il notevole vantaggio di essere del tutto generale.

#### 7.1.4 La riduzione all'equazione radiale

Veniamo ora alla discussione delle equazioni (7.3) e (7.4), che riscriviamo nella forma più comoda

$$(7.6) \quad \dot{\vartheta} = \frac{\ell}{mr^2}, \quad m\ddot{r} = mr\dot{\vartheta}^2 - \frac{dV}{dr},$$

avendo denotato con  $\ell$  il momento angolare, che sappiamo essere costante e che possiamo ben determinare mediante i dati iniziali. Sostituendo la prima delle (7.6) nella seconda si ottiene l'*equazione radiale*

$$(7.7) \quad m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} ,$$

che descrive l'evoluzione del solo raggio. Ora, si vede bene che questa è l'equazione di un punto materiale in movimento su una retta sotto l'azione del *potenziale efficace*

$$(7.8) \quad V^*(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} ,$$

essendo  $V(r)$  il potenziale della forza centrale. Il termine  $\frac{\ell^2}{2mr^2}$  viene detto *potenziale centrifugo*.<sup>3</sup> Possiamo dunque sostituire alla (7.7) l'equazione di conservazione dell'energia per quest'ultimo problema, ossia

$$(7.9) \quad \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V^*(r) = E ,$$

dove  $E$  è una costante da determinarsi mediante i dati iniziali. Seguendo il procedimento generale che abbiamo visto nel paragrafo 4.3.4 possiamo riscrivere quest'ultima equazione come

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V^*(r))} ,$$

ed integrarla con la condizione iniziale  $r(t_0) = r_0$ , ricavando

$$(7.10) \quad \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\pm \sqrt{E - V^*(\rho)}} = t - t_0 .$$

Questa operazione richiede una quadratura, seguita da un'inversione per ricavare la soluzione  $r(t)$ .

Una volta svolto questo calcolo dobbiamo sostituire la soluzione trovata nella prima delle (7.6), che diventa così un'equazione delle forma  $\dot{\vartheta} = f(t)$ , con il membro di destra funzione nota del tempo. Imponendo allora la condizione iniziale  $\vartheta(0) = \vartheta_0$  si calcola la soluzione mediante una seconda quadratura, ossia

$$(7.11) \quad \vartheta - \vartheta_0 = \int_{t_0}^t \frac{\ell}{m(r(\tau))^2} d\tau$$

La discussione svolta fin qui basta per concludere con la

**Proposizione 7.4:** *Il problema del moto centrale è integrabile per quadrature.*

---

<sup>3</sup> Il nome può apparire bizzarro, ma è ben giustificato. In effetti si vede che l'azione di questo termine è repulsiva, tendendo ad allontanare il punto dal centro.

### 7.1.5 Studio qualitativo dell'equazione radiale

Le formule di quadratura che abbiamo appena scritto non dicono molto sulla forma dell'orbita. Per saperne di più occorre proseguire la discussione, che svolgiamo ora in forma qualitativa.

Concentriamoci anzitutto sull'equazione radiale, ed in particolare sulla formula (7.9) dell'energia, che riscriviamo per comodità

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V^*(r) = E .$$

Qui non possiamo aggiungere molto se non introduciamo almeno qualche ipotesi qualitativa sull'andamento del potenziale.

Il caso di maggior interesse è ovviamente quello della forza gravitazionale, ovvero del *potenziale kepleriano*

$$(7.12) \quad V(r) = -\frac{k}{r} ,$$

con  $k$  costante, che ci interessa per il caso del moto planetario. Un altro esempio in qualche modo significativo se non altro perché particolarmente semplice è quello del *potenziale armonico*

$$(7.13) \quad V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

anche qui con  $k$  costante.

Prima di concentrare l'attenzione sul caso della forza gravitazionale è però interessante considerare un potenziale che abbia un comportamento qualitativo simile a quello kepleriano. Chiediamo in particolare:

- (i) che la forza sia attrattiva, ossia  $\frac{dV}{dr} > 0$ ;
- (ii) che  $V(r)$  si annulli per  $r \rightarrow +\infty$  meno rapidamente di  $1/r^2$ , in modo da prevalere sul potenziale centrifugo;
- (iii) che  $V(r)$  tenda a  $-\infty$  per  $r \rightarrow 0^+$  più lentamente di  $1/r^2$ , in modo che in prossimità del centro prevalga il potenziale centrifugo.

La prima condizione garantisce l'esistenza di almeno un minimo per il potenziale efficace; la seconda introduce l'ipotesi fisicamente ragionevole che la forza diventi influente a grandi distanze; la terza evita la caduta sul centro sotto la sola condizione che il momento angolare non sia nullo.

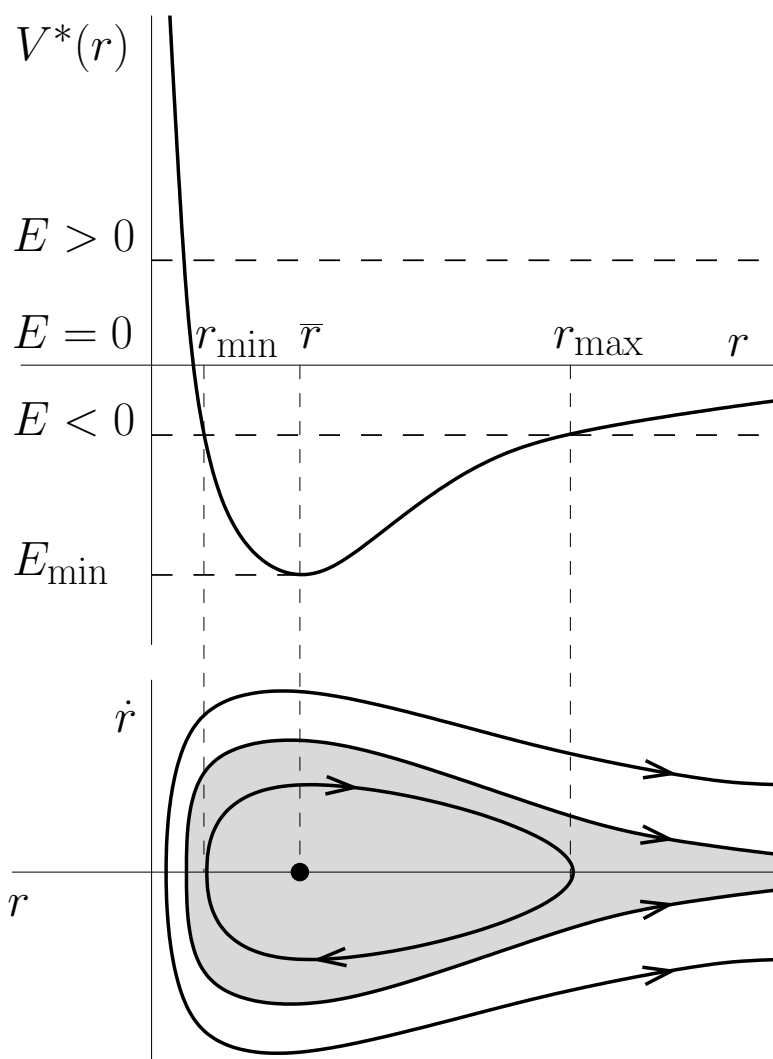
Come esempio significativo e relativamente semplice consideriamo un potenziale del tipo

$$V(r) = -\frac{k}{r^\alpha} \quad 0 < \alpha < 2 .$$

In questo caso la descrizione qualitativa della dinamica è quella rappresentata in figura 7.3. Il grafico del potenziale efficace presenta un unico punto di minimo in un punto  $\bar{r}$  che si determina facilmente se si fissa l'esponente  $\alpha$ , così come si determina il valore corrispondente dell'energia  $E_{\min} = V^*(\bar{r})$ . Inoltre si ha

$$V^*(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} +\infty , \quad V^*(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0^- .$$





**Figura 7.3.** Un esempio di studio qualitativo del flusso dovuto all'equazione radiale per un punto soggetto al potenziale  $V(r) = kr^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 2$ .

Il punto di minimo corrisponde alla soluzione particolare  $r(t) = \bar{r}$ , ossia di raggio costante. Per energia  $E$  soddisfacente  $E_{\min} < E < 0$  si hanno orbite chiuse nel piano  $r, \dot{r}$ , corrispondenti ad oscillazioni del raggio limitate in ampiezza; si parla in questo caso di *stati legati*, mettendo in evidenza che il punto resta confinato a distanza finita dal centro. Per  $E > 0$  la distanza non è limitata superiormente, ma solo inferiormente; si parla di *stati di scattering*, ad indicare che il punto può provenire da distanze arbitrariamente grandi e viene reinviato all'infinito dopo aver subito una deflessione.<sup>4</sup> Si noti che per  $r \rightarrow +\infty$  il moto tende a diventare uniforme con velocità  $\dot{r} = \sqrt{2E/m}$ .

<sup>4</sup> In Fisica è d'uso parlare di scattering quando si ha una forza che tende a zero quando la distanza tende all'infinito, sicché il movimento tende asintoticamente a quello di un punto libero. I casi particolarmente rilevanti delle forze gravitazionali o elettriche rientrano in questa categoria.

L'orbita corrispondente ad  $E = 0$  fa da separatrice tra gli stati legati, che sono tutti nell'area grigia in figura, e quelli di scattering. Il comportamento di questa separatrice appare un po' singolare rispetto ai casi discussi fin qui. La ragione è che il punto instabile si trova all'infinito: la velocità tende a zero per  $r \rightarrow +\infty$ .

### 7.1.6 Gli stati legati

Fin qui ci ha condotto lo studio della dinamica nella direzione radiale. Non dobbiamo però dimenticare che stiamo studiando la dinamica in un piano, ed a questa occorre prestare attenzione. Veniamo dunque a descrivere il comportamento delle orbite percorse dal punto nel piano. A tal fine dobbiamo prendere in considerazione anche la prima delle equazioni (7.6), ovvero la conservazione del momento angolare. Ci occupiamo anzitutto del caso degli stati legati, particolarmente interessante per la dinamica planetaria.

Il caso dell'equilibrio  $r(t) = \bar{r}$  è il più semplice: l'orbita è caratterizzata da raggio costante, ed è dunque una circonferenza. In questo caso l'equazione del momento diventa

$$\dot{\vartheta} = \frac{\ell}{m\bar{r}^2} ,$$

con secondo membro costante. Ne segue che il moto sull'orbita circolare è uniforme, con periodo  $T = 2\pi m\bar{r}^2/\ell$ .

Il caso degli stati legati è più interessante. Ricordiamo anzitutto che il moto in direzione radiale è oscillatorio entro l'intervallo  $[r_{\min}, r_{\max}]$  determinato dall'energia  $E$ . Contemporaneamente l'angolo  $\vartheta$  evolve nel tempo secondo l'equazione

$$\dot{\vartheta} = \frac{\ell}{mr(t)^2} .$$

L'evoluzione di  $\vartheta(t)$  non è più uniforme, il che concorda con la validità della legge delle aree, ma possiamo comunque dedurre che  $\vartheta(t)$  è funzione monotona del tempo, perché il denominatore è certamente positivo e non può annullarsi.

Per determinare la forma dell'orbita conviene eliminare il tempo dalle due equazioni che esprimono la conservazione del momento angolare e dell'energia, e che riscriviamo per comodità

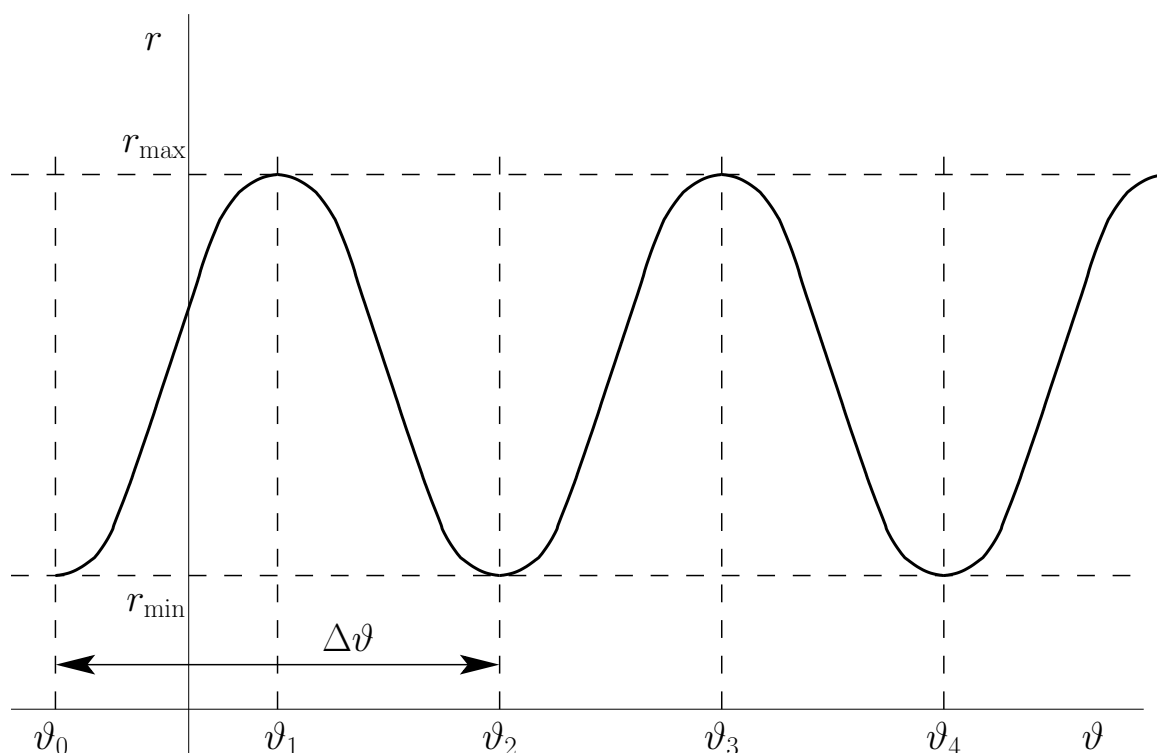
$$(7.14) \quad \dot{\vartheta} = \frac{\ell}{mr^2} , \quad \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V^*(r))} .$$

L'operazione è lecita grazie al fatto che  $\vartheta(t)$  è funzione monotona del tempo.<sup>5</sup> Otteniamo così l'equazione dell'orbita

$$(7.15) \quad \frac{dr}{d\vartheta} = \pm \frac{mr^2}{\ell} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V^*(r))} .$$

---

<sup>5</sup> Il lettore osserverà che questo procedimento può interpretarsi come un cambiamento della variabile temporale: all'orologio che approssima il tempo assoluto di Newton si sostituisce il movimento sull'orbita. Il che, del resto, è quanto l'umanità ha fatto per millenni.



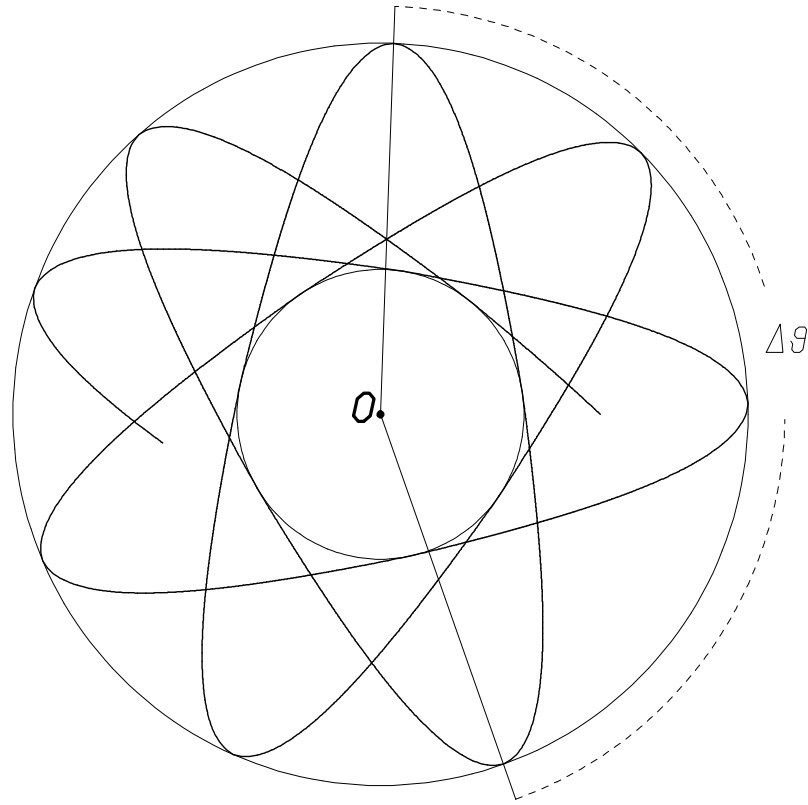
**Figura 7.4.** L'evoluzione del raggio  $r$  come funzione dell'angolo  $\vartheta$ .

Si tratta di un'equazione a variabili separabili, che una volta fissati i dati iniziali  $r_0, \vartheta_0$  può risolversi mediante una quadratura, ossia

$$(7.16) \quad \vartheta - \vartheta_0 = \pm \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{E - V^*(\varrho)}} .$$

Supponiamo che inizialmente il punto si trovi al pericentro, sicché  $r_0 = r_{\min}$ , con un angolo  $\vartheta_0$  arbitrario. Allora si può integrare l'equazione (7.16) al variare dell'estremo superiore  $r$  fino all'apocentro  $r_{\max}$  che viene raggiunto per un certo valore  $\vartheta_1$ , e poiché  $\vartheta$  risulta essere funzione monotona di  $\varrho$ , che possiamo assumere crescente supponendo  $\ell > 0$ , si può invertire la relazione, ottenendo una funzione  $r(\vartheta)$  che nell'intervallo  $[\vartheta_0, \vartheta_1]$  cresce a sua volta in maniera monotona da  $r_{\min}$  a  $r_{\max}$ , come rappresentato qualitativamente in figura 7.4. Invertendo il segno e lasciando decrescere di nuovo  $r$  fino al pericentro  $r_{\min}$  si determina poi  $r(\vartheta)$  sull'intervallo  $[\vartheta_0, \vartheta_2]$ . Qui si deve osservare che il grafico di  $r(\vartheta)$  su questo secondo intervallo è simmetrico rispetto al precedente; precisamente si ha  $r(\vartheta_1 + \delta\vartheta) = r(\vartheta_1 - \delta\vartheta)$ ; ciò risulta evidente dalla forma dell'integrando nella (7.16). Si determina così la forma della funzione  $r(\vartheta)$  sull'intervallo  $[\vartheta_0, \vartheta_2]$ . Osservando poi che  $r(\vartheta)$  è palesemente funzione periodica del suo argomento con periodo  $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_0$  si costruisce l'intero grafico, come rappresentato in figura 7.4.

Veniamo ora alla forma dell'orbita nel piano. Si osserva subito che l'orbita è contenuta in una corona circolare di raggi  $r_{\min}, r_{\max}$ , e che al crescere dell'angolo  $\vartheta$  il



**Figura 7.5.** L'orbita a rosetta per il moto centrale.

raggio oscilla periodicamente tra i due estremi. L'osservazione cruciale è che il periodo  $\Delta\vartheta$  dipende sia dalla forma del potenziale che dai valori di  $\ell$  ed  $E$ . Tale valore può calcolarsi esplicitamente come

$$(7.17) \quad \Delta\vartheta = \ell \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{E - V^*(\rho)}} .$$

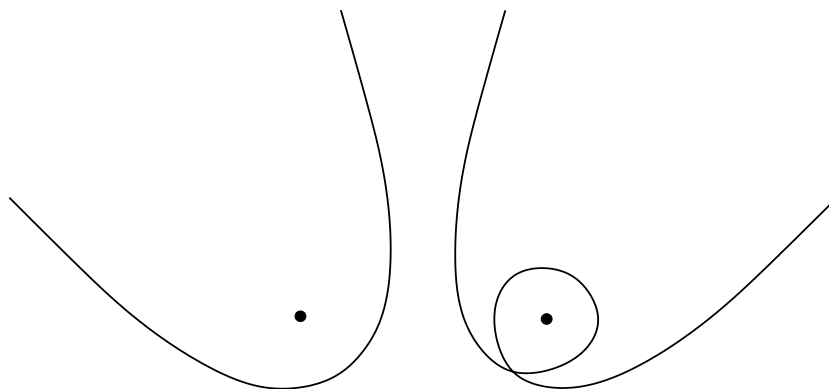
In generale si avrà un'orbita piana *a rosetta*, come rappresentato in figura 7.5. Si verifica in particolare che l'orbita ripassa per il punto iniziale, ed è quindi strettamente periodica, se e solo se il rapporto  $\frac{\Delta\vartheta}{2\pi}$  è un numero razionale. Se invece tale rapporto è irrazionale allora l'orbita non è periodica, ma riempie densamente la corona circolare.

**Esercizio 7.2:** Svolgere lo studio qualitativo dell'orbita per il caso del potenziale armonico,  $V(r) = \frac{kr^2}{2}$ , con  $k$  costante positiva.

**Esercizio 7.3:** Calcolare il valore di  $\Delta\vartheta$  per il potenziale armonico  $V(r) = \frac{kr^2}{2}$  e per il potenziale kepleriano  $V(r) = -\frac{k}{r}$ , con  $k$  costante positiva.

Risposta: per il potenziale armonico si ha  $\Delta\vartheta = \pi$ . Per il potenziale kepleriano è  $\Delta\vartheta = 2\pi$ . Il calcolo può svolgersi evidentemente solo per gli stati legati. Il fatto interessante è che tale risultato è indipendente da  $\ell$  ed  $E$ , sicché risulta che per questi potenziali tutte le orbite limitate sono chiuse, ed il moto è sempre periodico.

Il risultato dell'esercizio precedente può far nascere il sospetto che il caso di orbite



**Figura 7.6.** Esempi di orbite di scattering per un potenziale attrattivo del tipo della figura 7.3. Si osservi che l'orbita può girare più volte intorno al centro prima di tornare all'infinito.

chiuse sia tipico. Un teorema dovuto a Bertrand<sup>[6]</sup> afferma che i potenziali kepleriano ed armonico sono gli unici per cui valga la proprietà che tutte le orbite limitate sono chiuse. Per inciso, questo mostra quanto il caso kepleriano sia eccezionale.

**Esercizio 7.4:** Svolgere lo studio qualitativo dell'orbita per il caso dei potenziali  $V(r) = -\frac{k}{r^2}$ ,  $V(r) = -\frac{k}{r^3}$  e  $V(r) = -\alpha \ln r - \frac{k}{r}$ , con  $\alpha$  e  $k$  costanti positive. Suggerimento: si presti attenzione al comportamento asintotico delle orbite.

### 7.1.7 Gli stati di scattering

Passiamo ora a considerare gli stati non legati, che nella classe di potenziali che stiamo considerando corrispondono ad energia  $E > 0$ . Anche in questo caso si fa ricorso alla formula (7.10), con la sola osservazione che l'orbita resta limitata solo inferiormente dal valore  $r_{\min}$  per cui si annulla il denominatore dell'integrando. Quindi ponendo ad esempio  $r_0 = r_{\min}$  si può integrare con un estremo superiore  $r > r_{\min}$  arbitrario, prendendo il segno positivo o negativo a seconda che si voglia calcolare l'orbita nel futuro o nel passato rispetto al tempo iniziale. Anche in questo caso  $\vartheta$  risulta essere funzione monotona di  $r$ , sicché si può ricavare una funzione  $r(\vartheta)$ . La figura 7.6 illustra due esempi di orbite di scattering.

L'aspetto qualitativo interessante è che l'orbita può provenire dall'infinito in una direzione arbitraria, e dopo aver subito una deflessione viene reinviata all'infinito. In effetti, se il potenziale efficace ha il comportamento qualitativo della figura 7.3 allora nella formula (7.16) il radicando  $E - V^*(\varrho)$  resta limitato al crescere di  $r$ , sicché l'integrale converge ad un limite finito grazie al denominatore  $\varrho^2$ . L'angolo  $\Delta\vartheta$  di deflessione può calcolarsi ancora tramite la (7.16), avendosi

$$(7.18) \quad \Delta\vartheta = \ell \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{E - V^*(\varrho)}} .$$

**Esercizio 7.5:** Studiare qualitativamente il fenomeno dello scattering nel caso di un potenziale repulsivo, ad esempio  $V(r) = \frac{k}{r^\alpha}$  con  $\alpha$  e  $k$  costanti positive.

### 7.1.8 La formula di Binet

Prima di passare al calcolo dell'orbita ricaviamo una formula notevole, detta appunto *formula di Binet*.<sup>6</sup>

**Proposizione 7.5:** *Si consideri un punto che si muova di moto piano percorrendo l'orbita descritta da una funzione  $r(\vartheta)$  assegnata, e soddisfacendo la legge delle aree  $\frac{1}{2}r^2\dot{\vartheta} = C$ . Allora l'accelerazione (puramente radiale) è data da*

$$(7.19) \quad a_r = -\frac{4C^2}{r^2} \left( \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) .$$

**Dimostrazione.** Conoscendo la forma dell'orbita come funzione  $r(\vartheta)$ , consideriamo la funzione  $\vartheta(t)$ , che del resto potremmo calcolare grazie alla legge delle aree. Abbiamo allora anche la dipendenza temporale di  $r$  da  $t$  mediante la funzione composta  $r(\vartheta(t))$ . Derivando rispetto al tempo e tenendo conto della legge delle aree abbiamo

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{2C}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta} = -2C \frac{d}{d\vartheta} \frac{1}{r} .$$

Derivando una seconda volta si ottiene poi

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = -2C \dot{\vartheta} \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} = -\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} .$$

Sostituendo quest'ultima espressione unitamente alla legge delle aree nell'espressione  $a_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2$  dell'accelerazione radiale, data dalla (7.4), si ottiene la (7.19). *Q.E.D.*

### 7.1.9 Il calcolo dell'orbita nel caso kepleriano

Veniamo ora al calcolo dell'orbita nel caso che più ci interessa per lo studio della dinamica planetaria. A questo scopo si può procedere in molti modi, ad esempio facendo uso diretto dell'integrale (7.16) che fornisce l'orbita. Qui faremo ricorso alla formula di Binet, seguendo un procedimento forse meno diretto, ma certamente più semplice

**Proposizione 7.6:** *Per il potenziale kepleriano  $V(r) = -\frac{k}{r}$  con  $k > 0$  le orbite sono coniche con fuoco nel centro delle forze, determinate dall'equazione*

$$(7.20) \quad r = \frac{p}{1 - e \cos(\vartheta - \vartheta_0)} ,$$

il parametro  $p$  e l'eccentricità  $e$  sono determinate mediante il momento angolare  $\ell$  e l'energia  $E$  come

$$(7.21) \quad p = \frac{\ell^2}{mk} , \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}} .$$

In particolare:

---

<sup>6</sup> Jacques Philippe Marie Binet, matematico ed astronomo, nato a Rennes (Francia) il 2 febbraio 1786, morto a Parigi il 12 maggio 1856.

- (i) per  $E_{\min} \leq E < 0$  con  $E_{\min} = -\frac{mk^2}{2\ell^2}$  l'orbita è un'ellisse, come affermato dalla prima legge di Keplero, che degenera in una circonferenza per  $E = E_{\min}$ , ed in questo caso  $\vartheta_0$  è la direzione dell'apocentro;
- (ii) per  $E = 0$  l'orbita è una parabola, e  $\vartheta_0$  è la direzione dell'asse di simmetria della parabola;
- (iii) per  $E > 0$  l'orbita è un ramo di iperbole, e  $\vartheta_0$  è la direzione dell'asse di simmetria dell'iperbole.

**Corollario 7.7:** Nel caso di orbita ellittica o circolare,  $0 \leq e < 1$ , tra il semiasse maggiore  $a$  dell'ellisse ed il periodo  $T$  vale la relazione

$$(7.22) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}.$$

**Dimostrazione del corollario 7.7.** Ricordando che l'area dell'ellisse è  $\pi ab$ , dove  $b$  è il semiasse minore, si ha che la costante della velocità areolare è  $C = \frac{\pi ab}{T}$ . Tenendo conto che  $C = \frac{\ell}{2m}$  e della relazione  $p = \frac{b^2}{a}$  si ricava subito  $\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m^2 p}{\ell^2}$ . D'altra parte per la (7.21) abbiamo  $p = \frac{\ell^2}{mk}$ , e per sostituzione si ricava la (7.22). *Q.E.D.*

**Dimostrazione della proposizione 7.6.** Facciamo uso dell'equazione radiale (7.4) sostituendovi la formula di Binet per l'accelerazione, ricordando che in quest'ultima si suppone che  $r$  sia funzione di  $\vartheta$ . È comodo introdurre la nuova variabile  $u = \frac{1}{r}$  e cercare l'orbita come funzione  $u(\vartheta)$ . Abbiamo allora che  $u(\vartheta)$  obbedisce all'equazione

$$(7.23) \quad \frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u = \frac{1}{p}, \quad p = \frac{4mC^2}{k}.$$

Questa è un'equazione lineare non omogenea ben nota la cui soluzione generale è

$$u(\vartheta) = \frac{1}{p} + A \cos(\vartheta - \vartheta_0),$$

dove  $A$  e  $\vartheta_0$  sono costanti da determinarsi mediante i dati iniziali. Reintroducendo il raggio  $r$  e ponendo  $A = e/p$  si trova immediatamente l'espressione (7.20) per l'orbita. Dobbiamo però calcolare le costanti  $e$  e  $p$  in funzione di  $\ell$  ed  $E$ . Per determinare  $p$  si fa uso della (7.23) sostituendovi la relazione  $\ell = 2mC$  tra il momento della quantità di moto  $\ell$  e la costante delle aree  $C$ . Per calcolare  $e$  si osserva che la funzione  $r(\vartheta)$  che descrive l'orbita assume il suo valore minimo per  $\vartheta - \vartheta_0 = \pi$ , ed in quel punto si ha  $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$ . D'altra parte  $r_{\min}$ , essendo il punto di inversione del moto in direzione radiale, deve essere soluzione dell'equazione  $E - V^*(r) = 0$  con  $V^*(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$ . Questa è un'equazione di secondo grado in  $r$  le cui radici sono

$$r = \frac{\ell^2}{mk} \cdot \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}},$$

che coincidono per  $E = E_{\min} = -\frac{mk^2}{2\ell^2}$ . Per confronto tra il minimo di questi due valori ed il valore di  $r_{\min}$  riportato poco sopra si ottiene l'espressione (7.21) di  $e$ .

La prima delle (7.21) è l'equazione polare di una conica di eccentricità  $e$  e parametro  $p$ , che corrisponde ad una circonferenza per  $e = 0$ , un'ellisse per  $0 < e < 1$ , una parabola per  $e = 1$  ed un'iperbole per  $e > 1$ . Q.E.D.

Ricordiamo anche che l'eccentricità ed il parametro sono legate ai semiassi maggiore  $a$  e minore  $b$  dell'ellisse dalle relazioni

$$(7.24) \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

La proposizione appena dimostrata afferma che nel caso della forza gravitazionale, che è quella che ci interessa per il problema del moto planetario, vi sono orbite limitate che hanno la forma di ellissi, come affermato dalla prima legge di Keplero. Fin qui dunque vediamo confermate le prime due leggi, almeno nell'approssimazione in cui si possa considerare il Sole come fisso al centro del sistema planetario (o, come si cominciò a ritenere dopo Copernico, al centro dell'universo).<sup>7</sup>

Si deve però osservare che mentre le leggi di Keplero si limitano a stabilire fenomenologicamente quali siano le orbite dei pianeti noti la teoria di Newton mette in campo un'affermazione ben più generale: *qualunque massa* sottoposta alla gravità esercitata dal Sole deve muoversi su una conica, ed in particolare su un'ellisse se la sua energia corrisponde ad uno stato legato. Inoltre dall'equazione di Newton segue anche che possono esservi orbite *non limitate*, e precisamente le parabole e le iperboli, ignote a Keplero.<sup>8</sup>

<sup>7</sup> In realtà la teoria eliocentrica è assai più antica, ed era nota agli astronomi greci. Dalle poche testimonianze storiche che ci sono pervenute si ritiene che essa sia stata formalizzata da Aristarco di Samo, matematico ed astronomo greco vissuto tra il 310 ed il 230 AC. Purtroppo la perdita della stragrande maggioranza dei testi scritti dagli astronomi greci non ci permette di stabilire con certezza quali fossero le loro conoscenze: la maggior parte delle nostre informazioni proviene dall'*Almagesto* di Claudio Tolomeo, vissuto tra il 100 e il 175 DC (o almeno dal testo forse modificato da interpreti e copisti che è sopravvissuto al crollo generale della cultura greca), che costituisce il fondamento del sistema tolemaico accettato fino a Copernico.

<sup>8</sup> L'interesse di questa conclusione non sfuggì ad Edmund Halley, astronomo, matematico, fisico, geofisico e meteorologo contemporaneo di Newton. A lui spetta anzitutto il merito di aver convinto Newton a scrivere e pubblicare i *Principia*, pagandone anche le spese di stampa. Inoltre egli intuì che anche le comete potessero essere corpi celesti soggetti alle stesse leggi. Egli notò che le comete osservate nel 1531 da Pietro Apiano, nel 1607 da Keplero e nel 1682 avevano caratteristiche simili, ed ipotizzò che potesse trattarsi della stessa cometa. Valutandone le caratteristiche orbitali ed in particolare stimandone il periodo in circa 75 anni, egli ne predisse il ritorno nel 1757. Halley, morto nel 1742, non visse abbastanza a lungo per vederla di nuovo, ma la cometa fu osservata da Johann Georg Palitzsch il 25 dicembre 1758, e raggiunse il perielio il 13 marzo 1759. Il motivo del ritardo rispetto alle previsioni di Halley fu spiegato successivamente da Alexis Clairaut: era dovuto alla perturbazione di Giove e Saturno. La scoperta di Halley poneva fine alla discussione secolare sulla natura terrestre o celeste delle comete, di cui si ha ampia testimonianza anche nei *Dialoghi* di Galileo.



**Esercizio 7.6:** Svolgere il calcolo dell'orbita per il caso del potenziale armonico,  $V(r) = \frac{kr^2}{2}$ , e per quello del potenziale kepleriano repulsivo,  $V(r) = \frac{k}{r}$ , con  $k$  costante positiva.

### 7.1.10 La terza legge di Keplero ed il problema inverso.

La discussione che abbiamo svolto sin qui ci ha condotto alla giustificazione delle prime due leggi di Keplero. Sottolineiamo che esse descrivono la geometria e la cinematica di una singola orbita: non c'è riferimento a quell'armonia ed unità dell'intero sistema solare che Keplero aveva cominciato ad indagare fin dal 1596 con la pubblicazione della sua prima grande opera, il *Mysterium Cosmographicum*<sup>[27]</sup>. La terza legge, pubblicata nel 1619 nel trattato *Harmonices mundi*,<sup>[29]</sup> rappresentava un passo fondamentale nella sua ricerca. Nulla di meglio, per sottolineare l'importanza che egli attribuisce alla sua scoperta, che citare le sue stesse parole:<sup>9</sup>

“ *Hactenus egimus de diversis moris vel arcubus unius et eiusdem planetæ. Jam etiam de binorum motibus inter se comparatis agendum.*

(...)

*Rursum igitur hic aliqua pars mei Mysterii Cosmographici, suspensa ante 22 annos, quia nondum liquebat, absolvenda et huc inferenda est. Inventis enim veris orbium intervallis per observationes Brahei plurimi temporis labore continuo, tandem, tandem genuina proportio temporum periodicorum ad proportionem orbium*

— — — *sera quidem respexit inertem,*

*Respexit tamen et longo post tempore venit;*

*eaque, si temporis articulos petis, 8 Mart. huius anni sexcentesimo decimo octavi animo concepta, sed infeliciter ad calculos vocata eoque pro falsa rejecta, denique 15 Maji reversa, novo capto impetu expugnavit mentis*

---

<sup>9</sup> Fin qui abbiamo discusso dei tempi e degli archi di un solo e medesimo pianeta. Ora dobbiamo occuparci dei moti di due di essi, confrontandoli tra loro. (...) Qui devo tornare di nuovo su una parte del mio *Mysterium Cosmographicum*, lasciata in sospenso 22 anni fa perché non ancora risolta, per ridiscuterla e completarla. Infatti ho determinato le vere distanze tra gli Orbi grazie ad un lavoro lunghissimo ed assiduo sulle osservazioni di Brahe; e finalmente, finalmente la proporzione genuina tra i periodi temporali e le dimensioni delle orbite

— — — *tardi, è vero, volse il suo sguardo a me esausto,*

*eppur mi guardò, e dopo lunga attesa venne;*

e, se lo desideri, ti dirò esattamente quando. Concepita nel mio animo il giorno 8 di marzo di quest'anno 1618, ma rigettata come falsa perché mal tradotta in calcolo, si ripresentò nuovamente il 15 maggio, ed avendo acquistato nuova energia espugnò le tenebre della mia mente, saldamente confermata dall'azione congiunta dei miei diciassette anni di lavoro sulle osservazioni di Brahe e delle mie riflessioni su di esso. Così io dapprima credetti di sognare e di aver troppo presto contato sulla scoperta di un principio. Ma è affermazione certissima ed assolutamente esatta che *la proporzione tra i periodi temporali di due pianeti qualsiasi è in ragione di una volta e mezza quella tra le loro distanze medie, ossia tra i loro orbi.* ([29], Liber III, Caput V, pag. 279 dell'edizione delle Opere.)

*meæ tenebras, tanta comprobatione et laboris mei septendecennalis in observationibus Braheanis et meditationis huius in unum conspirantium, ut somniare me et præsumere quæsitum inter principia primo crederem. Sed res est certissima exactissimaque, quod proportio, quæ est inter binorum quorumcumque planetarum tempora periodica, sit præcise sesquialtera proportionis mediarum distantiarum, id est orbium ipsorum. ”*

Ricorrendo alla notazione sintetica delle nostre formule noi scriviamo la relazione di proporzionalità tra i periodi  $T$  ed i semiassi maggiori  $a$  delle orbite planetarie come

$$(7.25) \quad T = K a^{3/2} ,$$

dove  $K$  è una costante *indipendente dal pianeta*.

Dimentichiamo ora, per un momento, il calcolo che ci ha permesso di stabilire la forma dell'orbita tramite le equazioni di Lagrange (ovvero di Newton). Torniamo invece a considerazioni di natura puramente cinematica, riprendendo le prime due leggi di Keplero e sintetizzandole nella legge delle aree e nella forma ellittica dell'orbita in coordinate polari, ossia

$$(7.26) \quad \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} = C , \quad r = \frac{p}{1 - e \cos(\vartheta - \vartheta_0)} .$$

Su questa base affrontiamo il problema inverso, cioè: *Conoscendo le leggi di Keplero, calcolare l'accelerazione a cui è soggetto un pianeta*.

Procediamo anzitutto a determinare la dipendenza dell'accelerazione dalla distanza.<sup>10</sup>

**Proposizione 7.8:** *Se valgono le prime due leggi di Keplero allora l'accelerazione a cui è sottoposto il pianeta è puramente radiale ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, essendo*

$$(7.27) \quad a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

dove  $T$  è il periodo ed  $a$  il semiasse maggior dell'orbita.

**Dimostrazione.** Riscriviamo l'equazione dell'ellisse come  $\frac{1}{r} = \frac{1 - e \cos(\vartheta - \vartheta_0)}{p}$  ed applichiamo la formula di Binet. Con un breve calcolo otteniamo

$$a_r = -\frac{4C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} .$$

Sostituiamo in questa formula i valori  $C = \frac{\pi ab}{T}$  e  $p = \frac{b^2}{2a}$ . Con una facile semplificazione si ottiene subito la (7.27). Q.E.D.

---

<sup>10</sup> Il procedimento che seguiamo qui fa uso della formula di Binet, che presenta il vantaggio di semplificare in modo considerevole il calcolo. Il procedimento seguito da Newton è molto più complesso: si veda la *Propositio XI, Problema VI* all'inizio della *Sectio III, Liber I* dei *Principia*.

Vediamo dunque come le prime due leggi stabiliscano la proporzionalità tra l'accelerazione e l'inverso del quadrato della distanza. Fin qui però abbiamo considerato un solo pianeta.

La terza legge di Keplero afferma che *la costante di proporzionalità  $a^3/T^2$  che compare nella (7.27) non dipende dal pianeta*. Si può dunque concepire che lo spazio intorno al sole sia sede di un campo di accelerazioni creato dal sole stesso. In altre parole, *qualunque punto materiale posto nello spazio planetario è soggetto ad un'accelerazione diretta verso il Sole e di intensità calcolabile mediante la (7.27), con una costante di proporzionalità che dipende solo dal Sole*.

### 7.1.11 La gravitazione universale

Seguendo Newton, vediamo ora come partendo dalla forma dell'accelerazione che abbiamo appena ricavato ed aggiungendo la terza legge di Keplero si possa arrivare fino ad enunciare la legge di gravitazione. Qui si può ben dire che Newton “unisce la Terra al Cielo”, nel senso che trasporta all'intero sistema solare – che nella mentalità del suo tempo era l'universo intero – quelle leggi meccaniche che si potevano sperimentare sulla Terra.<sup>11</sup>

Se accettiamo la legge della dinamica  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ , allora potremo riformulare la conclusione del paragrafo precedente affermando che *il sole crea un campo di forze inversamente proporzionale al quadrato della distanza da esso e proporzionale alla massa del pianeta*. In altre parole, su qualunque corpo celeste posto nello spazio agirebbe una forza diretta verso il sole di intensità  $f(r) = \Gamma m/r^2$ , dove  $m$  è la massa del corpo e  $\Gamma$  una costante che dipende solo dal sole.

Dobbiamo osservare che l'accelerazione del pianeta non dipende dalla sua massa. Il fatto che questa circostanza si verifichi anche per il moto dei gravi in prossimità della superficie terrestre suggerisce che tale moto sia attribuibile ad una causa analoga, ossia che anche la Terra crei intorno a sé un campo di accelerazioni; si può poi ammettere che questo campo si estenda fino alla luna, e che possa anche dar ragione del moto della luna intorno alla Terra.<sup>12</sup>

Ammissa l'esistenza di un campo di accelerazioni intorno alla Terra, è spontaneo pensare all'esistenza di un campo di forze che si estende fino al sole, ossia che la Terra

<sup>11</sup> A noi, abituati a sentir parlare di voli spaziali, stelle, galassie, distanze inimmaginabili come migliaia o milioni di anni-luce, l'argomento sviluppato in questo paragrafo potrà sembrare tutto sommato naturale ed elementare. Ma riflettiamo un momento su quanto fossero già sconvolgenti al tempo di Galileo le affermazioni che sulla Luna ci fossero delle montagne, o che Giove avesse dei satelliti con una dinamica simile a quella della Luna, o che i pianeti fossero corpi rocciosi al pari della Terra e non, come comunemente si credeva, fatti di gemme preziose. Per rendersene conto basta rileggere il *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* di Galileo, ed in particolare la prima giornata. Ancor più forte è l'argomento di Newton, che mostra come la stessa Meccanica che ci rende ragione dei moti dei gravi e dei proiettili possa spiegare anche i moti dei corpi celesti.

<sup>12</sup> Si ricordi, a tal proposito, che l'esistenza di satelliti intorno a Giove era già nota ai tempi di Newton, grazie alla scoperta di Galileo. Dunque, il fatto che la Terra avesse un satellite non costituiva più un caso eccezionale.

eserciti sul sole una forza di intensità  $\gamma M/r^2$ , dove  $M$  è la massa del sole e  $\gamma$  una costante che dipende solo dalla Terra. Si noti bene che questo punto di vista conduce inevitabilmente a negare quella centralità del sole che costituisce il presupposto del modello Kepleriano.

Infine, se si accetta il principio di azione e reazione si deve ammettere l'eguaglianza  $\Gamma m = \gamma M$ , sicché la forza che si esercita fra la Terra e il Sole deve avere intensità  $GmM/r^2$ , dove  $G$  è una costante universale, dipendente solo dal sistema di misura. Se non si attribuisce qualche proprietà particolare alla Terra e al Sole si deve allora ammettere, con Newton, la validità delle *legge di gravitazione universale*:

*Tra due masse qualsiasi  $m_1, m_2$  si esercita una forza gravitazionale attrattiva di intensità  $Gm_1m_2/r^2$ , dove  $r$  è la distanza tra le due masse e  $G$  è una costante universale.*

In modo equivalente scriveremo il potenziale gravitazionale tra due masse  $m_1$  e  $m_2$  come

$$(7.28) \quad V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}.$$

**Esercizio 7.7:** (*Problema della mela di Newton*<sup>13</sup>). Mostrare che l'accelerazione di gravità alla superficie della Terra e l'accelerazione centripeta della Luna sono proporzionali agli inversi dei quadrati delle distanze dal centro della Terra.

Suggerimento: denotiamo con  $a$  l'accelerazione centripeta della Luna e con  $g$  l'accelerazione di gravità alla superficie della Terra. Denotiamo poi con  $R$  il raggio dell'orbita lunare (assunta circolare) e con  $r$  il raggio della Terra. Si tratta di mostrare che vale la relazione

$$\frac{g}{a} \sim \frac{\varrho^2}{R^2}.$$

A tal fine occorre calcolare l'accelerazione centripeta della Luna facendo uso della formula dell'accelerazione nel moto circolare,  $a = \omega^2 R$  dove  $\omega$  è la frequenza angolare. I dati astronomici attuali sono:

$\varrho = 3.844 \times 10^8$ m	raggio dell'orbita lunare;
$T = 2.361 \times 10^6$ s	periodo sidereo della Luna;
$g = 9.803$ m/s <sup>2</sup>	accelerazione di gravità;
$R = 6.378 \times 10^6$ m	raggio della Terra.

Si troverà che la relazione cercata è valida con un'approssimazione di 1 ‰. Newton valutava il raggio dell'orbita lunare pari a 60 volte il raggio della Terra, un valore non troppo diverso da quello attualmente accettato.

Una volta accettata la teoria Newtoniana, si deve poi rovesciare il problema: le leggi di Keplero devono essere giustificate sulla base della dinamica, assumendo la legge di gravitazione. Questo è il *problema diretto* che abbiamo trattato nei paragrafi

---

<sup>13</sup> *Principia*, Liber III, Prop. IV, Theor. IV

precedenti, e ci ha condotto alla conclusione che le orbite sono coniche, e non necessariamente ellissi. Il nostro calcolo però è valido nell'approssimazione in cui si considera il Sole fisso al centro dell'universo, assegnandogli così, con Copernico, Galileo e Keplero, un ruolo privilegiato. Ma la gravitazione universale cancella questo privilegio: il Sole è una massa al pari di tutti i pianeti o satelliti. Dovremmo quindi studiare la dinamica di un sistema di  $N$  punti materiali che interagiscono tra loro tramite la mutua attrazione gravitazionale. È questo il *problema degli  $N$  corpi*.

È subito evidente che il problema è estremamente complesso: non ci è più lecito considerare, con Keplero, un pianeta per volta, ma occorre, in linea di principio, scrivere le equazioni di moto per *tutti* i corpi presenti nel sistema solare, tenendo conto della forza gravitazionale agente tra tutte le coppie, e risolvere il sistema di equazioni che ne risulta. In altre parole, se si considerano  $N$  corpi si ha un sistema di  $3N$  equazioni differenziali del secondo ordine, in ciascuna delle quali l'espressione della forza contiene  $N - 1$  termini distinti. Ad esempio, Newton avrebbe dovuto scegliere almeno  $N = 8$  (Sole, Terra, Luna e i cinque pianeti allora conosciuti); questo, naturalmente, trascurando i satelliti di Giove e le comete, assumendo che null'altro si trovi nel sistema solare, e che le stelle non abbiano alcuna influenza sul moto planetario. Inoltre occorre anche ammettere che i pianeti si possano considerare come punti materiali, o almeno, come Newton si preoccupò di dimostrare, che un corpo omogeneo di forma sferica genera un campo gravitazionale equivalente a quello di un punto di egual massa posto nel centro del corpo.<sup>14</sup>

## 7.2 Il problema dei due corpi

L'estensione più immediata del modello Kepleriano (moto di un singolo pianeta rispetto al sole) è senz'altro costituita dal problema dei due corpi:

*Due punti materiali di massa  $m_1, m_2$  si muovono nello spazio sotto l'azione di forze mutue di attrazione o repulsione soddisfacenti il principio di azione e reazione, agenti lungo la retta congiungente i due punti e dipendenti dalla sola distanza.*

### 7.2.1 La Lagrangiana e le leggi di conservazione

Considerando un sistema di riferimento cartesiano denotiamo con  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  le posizioni dei due corpi. Denotiamo poi con  $m_1, m_2$  le loro masse. Assumendo che le forze che si esercitano tra i due corpi siano di tipo classico potremo introdurre il potenziale di interazione  $V(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|)$ , dipendente dalla sola distanza (si veda la proposizione 5.10). Ai fini della discussione che segue la forma esplicita del potenziale non è rilevante. La Lagrangiana del sistema si scrive immediatamente come

$$(7.29) \quad L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{x}}_2^2 - V(r) \ , \quad r = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \ .$$

---

<sup>14</sup> *Principia*, Propositio LXXIII Theorema XXXIII e Propositio LXXIV Theorema XXXIV.

Trattandosi di un sistema isolato di due punti, e quindi non soggetto a forze esterne, abbiamo tutti gli integrali primi classici elencati nella proposizione 5.13, sicché il sistema delle equazioni di Newton è certamente integrabile. Vediamo come si possa ricondurre il problema a quello, ormai ampiamente discusso, del moto centrale.

### 7.2.2 La riduzione al problema del moto centrale

È conveniente introdurre come nuove coordinate la posizione  $\mathbf{X}$  del baricentro e la posizione relativa  $\mathbf{r}$  dei due corpi definite come

$$(7.30) \quad M\mathbf{X} = m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad M = m_1 + m_2,$$

dove  $M$  è la massa totale. Derivando rispetto al tempo si calcola immediatamente  $M\dot{\mathbf{X}} = m_1\dot{\mathbf{x}}_1 + m_2\dot{\mathbf{x}}_2$  e  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_1$ , e sostituendo nella Lagrangiana si ottiene con un breve calcolo<sup>15</sup>

$$(7.31) \quad L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{X}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\|\mathbf{r}\|), \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2},$$

dove abbiamo introdotto la *massa ridotta*  $\mu$ .

La Lagrangiana che abbiamo appena scritto descrive due sottosistemi indipendenti. Il primo, con Lagrangiana

$$L_B = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{X}}^2,$$

descrive il moto di un punto libero, che risulta essere rettilineo uniforme e possiamo ignorare scegliendo un riferimento solidale col baricentro. Il secondo ha Lagrangiana

$$L' = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r), \quad r = \|\mathbf{r}\|$$

praticamente identica alla (7.1) che descrive il moto di un punto in un campo di forze centrali. Concludiamo dunque che *il problema dei due corpi si riconduce a quello di un solo punto in un campo di forze centrali con la sola sostituzione della massa ridotta  $\mu$  al posto della massa del singolo punto.*

**Esercizio 7.8:** Scrivere la trasformazione inversa della (7.30).

**Esercizio 7.9:** Calcolare la massa ridotta nei due casi: (i) due corpi di egual massa,  $m_1 = m_2$ ; (ii) una delle due masse sia molto più grande rispetto all'altra,  $m_2 \ll m_1$ .

Può essere utile aggiungere un'osservazione. La trasformazione di coordinate (7.31) non privilegia nessuno dei due punti. Nel caso Sole–pianeta questo significa che il vettore  $\mathbf{r}$  descrive altrettanto bene la posizione del pianeta rispetto al Sole quanto quella del Sole rispetto al pianeta. In altre parole, un osservatore che si ponesse sul Sole vedrebbe il pianeta girare intorno a lui su un'orbita ellittica, così come un osservatore che sta sul pianeta vede il Sole girargli intorno su un'orbita ellittica. La vera differenza è data dalla posizione del baricentro, che nel caso planetario è molto vicino al centro del Sole.

---

<sup>15</sup> Il modo più rapido consiste nel sostituire la trasformazione (7.30) nella (7.31) e ricavare la (7.29).

### 7.2.3 La terza legge di Keplero per il problema dei due corpi

La sostituzione della massa di un pianeta con la massa ridotta è ininfluente per le prime due leggi di Keplero, ma introduce una piccola correzione sulla terza. In effetti, se denotiamo con  $m_S$  la massa del Sole e con  $m_P$  quella del pianeta, e consideriamo il potenziale kepleriano abbiamo la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{Gm_Sm_P}{r}, \quad \mu = \frac{m_Sm_P}{m_S + m_P}.$$

Per il corollario 7.7, ponendo  $Gm_Sm_P$  al posto di  $k$  e  $\mu$  al posto di  $m$ , otteniamo

$$(7.32) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_S + m_P)}$$

al posto del valore  $\frac{4\pi^2}{Gm_S}$  che troveremmo nel caso del moto centrale. Si vede dunque che passando dal moto centrale al problema dei due corpi dobbiamo introdurre una dipendenza del periodo dalla massa del pianeta, sicché la terza legge di Keplero non risulta più esatta. Si tratta però, almeno nel caso del nostro sistema solare, di una correzione molto piccola e certamente non rilevabile con i dati osservativi a disposizione di Keplero. Si deve tener conto infatti che la somma delle masse di tutti i pianeti è circa  $10^{-3}$  volte la massa del Sole.

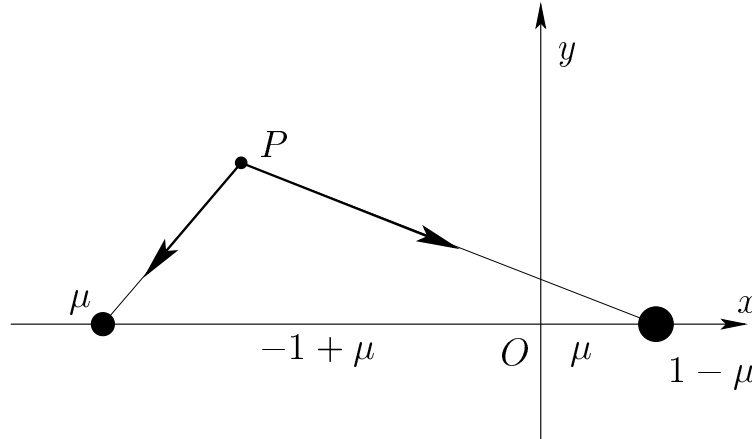
## 7.3 Il problema ristretto dei tre corpi

L'estensione naturale dei problemi del moto centrale e dei due corpi sarebbe la discussione del problema di  $N$  corpi materiali interagenti tra loro con forze di tipo classico, o in modo più specifico con forze di tipo Newtoniano. Ma già il caso  $n = 3$  rientra nella categoria dei sistemi non integrabili. In effetti, il problema dei tre corpi, definito da Whittaker “*the most celebrated of all dynamical problems*” rappresenta, insieme al problema del corpo rigido, uno degli argomenti più studiati della Meccanica Classica ed al tempo stesso un esempio significativo di sistema non integrabile. È appena il caso di sottolineare che proprio su questo problema Poincaré ha scoperto la non integrabilità come proprietà tipica dei sistemi dinamici e l'esistenza di un comportamento caotico.

Studieremo qui almeno gli aspetti più semplici della dinamica nel caso del cosiddetto *problema ristretto dei tre corpi*, che si enuncia come segue: *Due punti materiali, detti corpi primari, si muovono nello spazio su un'orbita Kepleriana ellittica (o circolare). Un terzo punto  $P$  di massa trascurabile rispetto ai primi due, detto planetoidale, si muove sotto l'azione della forza Newtoniana esercitata dai primari, senza influenzarne il movimento. Si chiede di studiare la dinamica del punto  $P$ .*

In altre parole, si suppone che i due primari si comportino come un sistema a due corpi, la cui dinamica non viene influenzata dal planetoidale. A sua volta, il planetoidale si muove sotto l'azione di un ambiente esterno, rappresentato appunto dai primari.

Il problema ammette diverse varianti. Si distingue anzitutto il caso *circolare*, in cui i due primari ruotano a velocità uniforme rispetto al baricentro comune, dal caso



**Figura 7.7.** Il problema ristretto piano dei tre corpi, come descritto nel testo.

*ellittico*. Si distingue poi il caso *piano*, in cui il planetotide è vincolato a muoversi nel piano dell'orbita dei primari, da quello *spaziale*. Combinando tra loro queste due scelte si hanno quattro casi possibili, e comunque tutti non integrabili. Noi ci occuperemo qui solo del caso *circolare piano*, e concentreremo l'attenzione solo sui cosiddetti *equilibri lagrangiani*.<sup>16</sup>

### 7.3.1 Scelta delle unità di misura

È conveniente scegliere le unità di misura in modo da ricondurre il problema alla forma più semplice possibile. Come misura di lunghezza si sceglie la distanza tra i primari. Si sceglie poi l'unità di massa pari alla somma delle masse dei primari (quella del planetotide è trascurabile), e si denota con  $\mu$  la massa di uno dei due primari (solitamente la più piccola), sicché l'altra massa risulta essere  $1 - \mu$ . Infine si sceglie l'unità di tempo in modo che la costante di gravitazione universale  $G$  valga 1.

Ricordiamo che per la soluzione Kepleriana del problema dei due corpi vale la relazione tra semiassi e periodi

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2},$$

dove  $m_1, m_2$  sono le masse. Ne segue che nelle unità di misura che abbiamo scelto la soluzione Kepleriana circolare per il moto dei due primari ha periodo  $T = 2\pi$ , e dunque frequenza angolare  $\omega = 1$ . Infine, dal momento che la Lagrangiana per il planetotide (terzo corpo) risulta essere proporzionale alla massa, diciamo  $m$ , di quest'ultimo possiamo dividere la Lagrangiana per  $m$ . In altre parole, il moto del planetotide non dipende dalla sua massa nell'approssimazione del problema ristretto.

<sup>16</sup> La considerazione del problema spaziale non comporta difficoltà di rilievo rispetto alla trattazione che qui svolgiamo, di per sé limitata alla sola scrittura delle equazioni e discussione di soluzioni particolari. Decisamente più difficile invece è la discussione del problema ellittico, per la quale rimandiamo ai testi di Meccanica Celeste.



### 7.3.2 Scrittura della Lagrangiana e delle equazioni del moto

Il procedimento tradizionale, ed in effetti anche il più comodo, consiste nel considerare un sistema di riferimento solidale coi primari, e quindi in moto rotatorio uniforme attorno al baricentro dei primari. In questo sistema di riferimento si pongono le due masse sull'asse  $x$ , con la massa maggiore dal lato positivo, come illustrati in figura 7.7. Dunque, la massa  $1 - \mu$  occupa la coordinata  $\mu$  e la massa  $\mu$  occupa la posizione  $-1 + \mu$  sull'asse  $x$ .

Per scrivere la Lagrangiana consideriamo anzitutto un sistema di riferimento fisso, e denotiamo con  $\xi, \eta$  le coordinate cartesiane del planetoido. La Lagrangiana si scrive

$$L(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - V(\xi, \eta, t) .$$

La dipendenza dell'energia potenziale dal tempo è chiaramente dovuta al moto rotatorio dei primari. Per ora non serve dare a  $V(\xi, \eta, t)$  un'espressione più esplicita. Dette  $x, y$  le coordinate nel sistema rotante uniformemente con velocità angolare  $\omega$ , e scegliendo le origini dei due sistemi coincidenti, si hanno le relazioni geometriche<sup>17</sup>

$$\xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t , \quad \eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t .$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (\dot{x} - \omega y) \cos \omega t - (\dot{y} + \omega x) \sin \omega t \\ \dot{\eta} &= (\dot{x} - \omega y) \sin \omega t + (\dot{y} + \omega x) \cos \omega t . \end{aligned}$$

Per sostituzione si ottiene la Lagrangiana nel sistema rotante

$$L = \frac{1}{2}m \left[ (\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 \right] - V(x, y, t) ,$$

dove  $V(x, y, t)$  è l'energia potenziale. In generale, avendo scritto la Lagrangiana in un sistema in movimento, ci si dovrà aspettare una dipendenza dal tempo nel potenziale. Vedremo subito che nel problema ristretto dei tre corpi ciò non accade.

Dobbiamo ora scrivere esplicitamente il potenziale tenendo conto che il planetoido è soggetto all'attrazione dei primari. Ricordando che nel sistema rotante uniformemente i primari hanno rispettivamente coordinate  $x_1 = \mu, y_1 = 0$  e  $x_2 = -1 + \mu, y_2 = 0$  avremo

$$V(x, y, t) = -\frac{Gm(1 - \mu)}{r_1} - \frac{Gm\mu}{r_2}$$

dove

$$(7.33) \quad r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2} , \quad r_2 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2}$$

In conclusione, tenendo conto della scelta delle unità di misura fatta nel paragrafo 7.3.1 possiamo porre  $G = 1$  e  $\omega = 1$ , e possiamo anche dividere la Lagrangiana

---

<sup>17</sup> Come si vede, la trasformazione di coordinate dipende dal tempo. Ciò non nuoce alla validità del formalismo lagrangiano, che anzi si rivela utilissimo anche in questo caso.

per  $m$ . Scriveremo dunque

$$(7.34) \quad L = \frac{1}{2} [(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2] + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} ,$$

con  $r_1$  e  $r_2$  dati dalla (7.33)

Un modo comodo per scrivere le equazioni di moto consiste nel considerare le quantità

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y , \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x .$$

In tal modo le equazioni di Lagrange si scrivono semplicemente

$$\dot{p}_x = \frac{\partial L}{\partial x} , \quad \dot{p}_y = \frac{\partial L}{\partial y} ,$$

che sono da considerare insieme alle due precedenti. Calcolando esplicitamente le derivate nell'ultima formula ricaviamo il sistema di equazioni nelle 4 variabili  $x, y, p_x, p_y$

$$(7.35) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y \\ \dot{y} &= p_y - x \\ \dot{p}_x &= p_y - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x + 1 - \mu)}{r_2^3} \\ \dot{p}_y &= -p_x - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} . \end{aligned}$$

### 7.3.3 Calcolo degli equilibri relativi

Vogliamo ora cercare le soluzioni di equilibrio per il sistema (7.35). Il lettore noterà che si tratta delle posizioni in cui il planetioide sta fermo in un sistema di riferimento che ruota uniformemente. Nel sistema fisso si vedranno i tre corpi girare con velocità uniforme mantenendo la stessa posizione relativa.

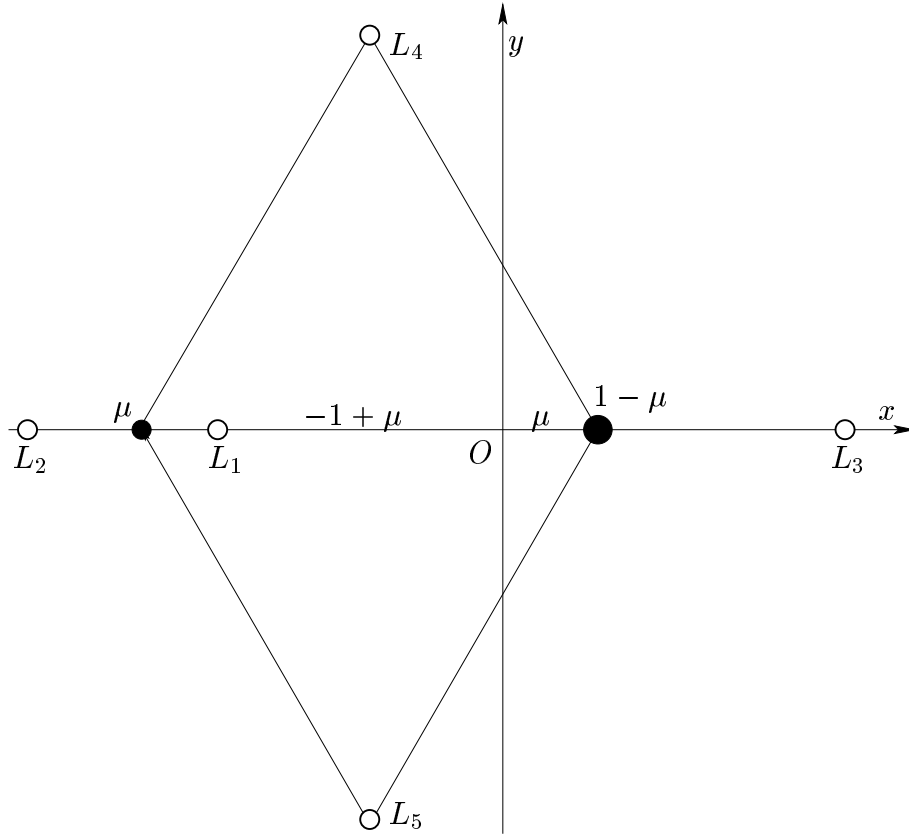
Occorre annullare i secondi membri delle equazioni. Ponendo  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  otteniamo subito

$$p_x = -y , \quad p_y = x .$$

Le altre due equazioni diventano

$$(7.36) \quad \begin{aligned} x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x + 1 - \mu)}{r_2^3} &= 0 \\ y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} &= 0 . \end{aligned}$$

Per il seguito è conveniente anche fattorizzare  $x$  e  $y$  al numeratore, e riscrivere le



**Figura 7.8.** I cinque equilibri lagrangiani del problema ristretto dei tre corpi.

equazioni nella forma

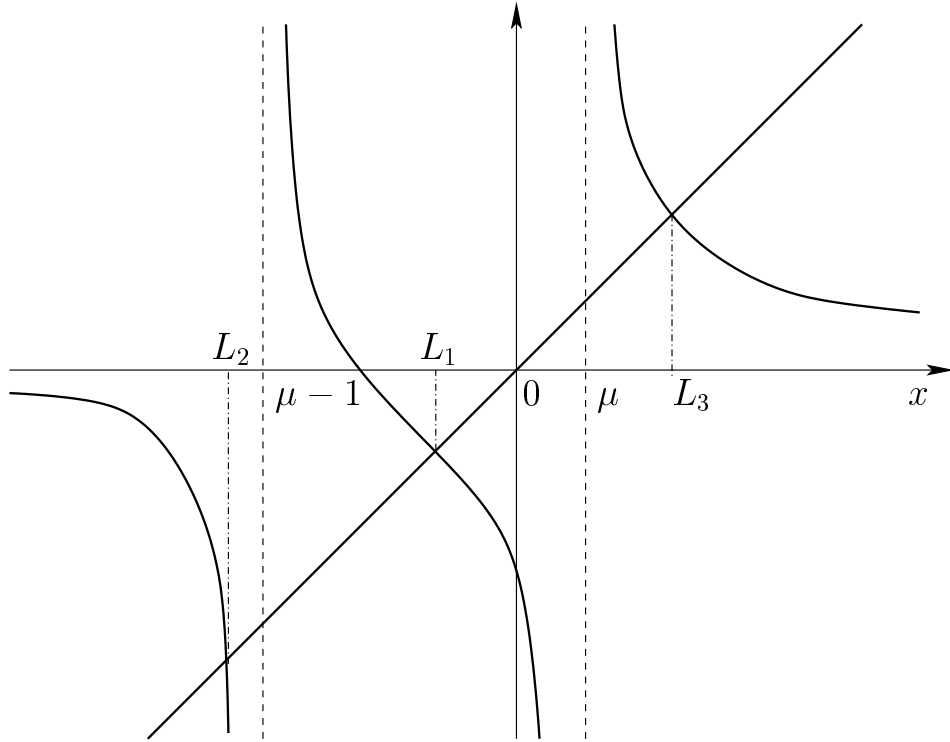
$$(7.37) \quad \begin{aligned} x \left( 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) + \mu(1-\mu) \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) &= 0 \\ y \left( 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Le soluzioni di quest'ultima coppia di equazioni o, equivalentemente, delle (7.36) sono le posizioni di equilibrio cercate. Anticipiamo fin d'ora che, come scoperto da Lagrange, esistono 5 punti di equilibrio distinti, di cui tre giacciono sull'asse che congiunge i primari, e vengono detti *equilibri collineari*, e gli altri due sono disposti in modo da formare un triangolo equilatero con i due primari, e vengono detti *equilibri triangolari*. Gli equilibri sono rappresentati in figura 7.8.

### 7.3.4 Equilibri collineari

Iniziamo col porre  $y = 0$  nella seconda delle (7.37). Per inciso, questo corrisponde proprio alla ricerca di soluzioni allineate coi primari. La prima delle (7.36) diventa allora

$$(7.38) \quad x = \frac{1-\mu}{|x-\mu|(x-\mu)} + \frac{\mu}{|x+1-\mu|(x+1-\mu)}$$



**Figura 7.9.** Studio qualitativo delle soluzioni dell'equazione (7.38). I punti di equilibrio collineari sono le intersezioni tra la funzione identità al primo membro e la funzione al secondo membro, che ha l'andamento qualitativo illustrato in figura.

(si presti attenzione al segno nelle semplificazioni). Per uno studio puramente qualitativo delle soluzioni si può far riferimento alla figura 7.9, che riporta l'andamento della funzione al secondo membro. Gli equilibri sono i punti di intersezione con la funzione identità che compare al primo membro. Si vede che esistono sempre tre soluzioni distinte, di cui una interna al segmento che congiunge i primari, e le altre due esterne, da lati opposti.<sup>18</sup> Si indica solitamente con  $L_1$  la soluzione localizzata tra i due primari,  $L_2$  quella a sinistra del punto  $-1 + \mu$  e  $L_3$  quella a destra del punto  $\mu$ .

Veniamo ora alla soluzione dell'equazione (7.38). Conviene introdurre la variabile  $\delta$  definita come

$$(7.39) \quad \delta = x + 1 - \mu ,$$

ovvero come la distanza con segno del punto di equilibrio dalla posizione del corpo di

---

<sup>18</sup> A prima vista le due soluzioni esterne all'intervallo  $[-1 + \mu, \mu]$  possono lasciare perplessi. Si ricordi però che il sistema di riferimento è in rotazione. Gli equilibri corrispondono ai punti in cui l'attrazione gravitazionale dei primari annulla la forza centrifuga dovuta alla rotazione.

massa  $\mu$ . Avremo dunque  $r_1 = |\delta|$  e  $r_2 = |1 - \delta|$ . Per sostituzione nella (7.38) si ricava

$$(7.40) \quad \delta + \mu - 1 = \frac{1 - \mu}{(\delta - 1)|\delta - 1|} + \frac{\mu}{\delta|\delta|} ,$$

ed è opportuno considerare separatamente tre casi

(i)  $0 < \delta < 1$ , ovvero il caso del punto  $L_1$ . L'equazione (7.40) si riscrive

$$\delta + \mu - 1 = -\frac{1 - \mu}{(1 - \delta)^2} + \frac{\mu}{\delta^2} ,$$

e risolvendo rispetto a  $\mu$  otteniamo

$$(7.41) \quad \mu = \frac{\delta^3(3 - 3\delta + \delta^2)}{1 - 2\delta + \delta^2 + 2\delta^3 - \delta^4} ,$$

(ii)  $\delta < 0$ , ovvero il caso del punto  $L_2$ . L'equazione (7.40) si riscrive

$$\delta + \mu - 1 = -\frac{1 - \mu}{(1 - \delta)^2} - \frac{\mu}{\delta^2} ,$$

e risolvendo rispetto a  $\mu$  otteniamo

$$(7.42) \quad \mu = -\frac{\delta^3(3 - 3\delta + \delta^2)}{1 - 2\delta + \delta^2 - 2\delta^3 + \delta^4} .$$

(iii)  $\delta > 1$ , ovvero il caso del punto  $L_3$ . L'equazione (7.40) si riscrive

$$\delta + \mu - 1 = \frac{1 - \mu}{(1 - \delta)^2} + \frac{\mu}{\delta^2} ,$$

e risolvendo rispetto a  $\mu$  otteniamo

$$(7.43) \quad \mu = -\frac{\delta^2(2 - 3\delta + 3\delta^2 - \delta^3)}{1 - 2\delta - \delta^2 + 2\delta^3 - \delta^4} .$$

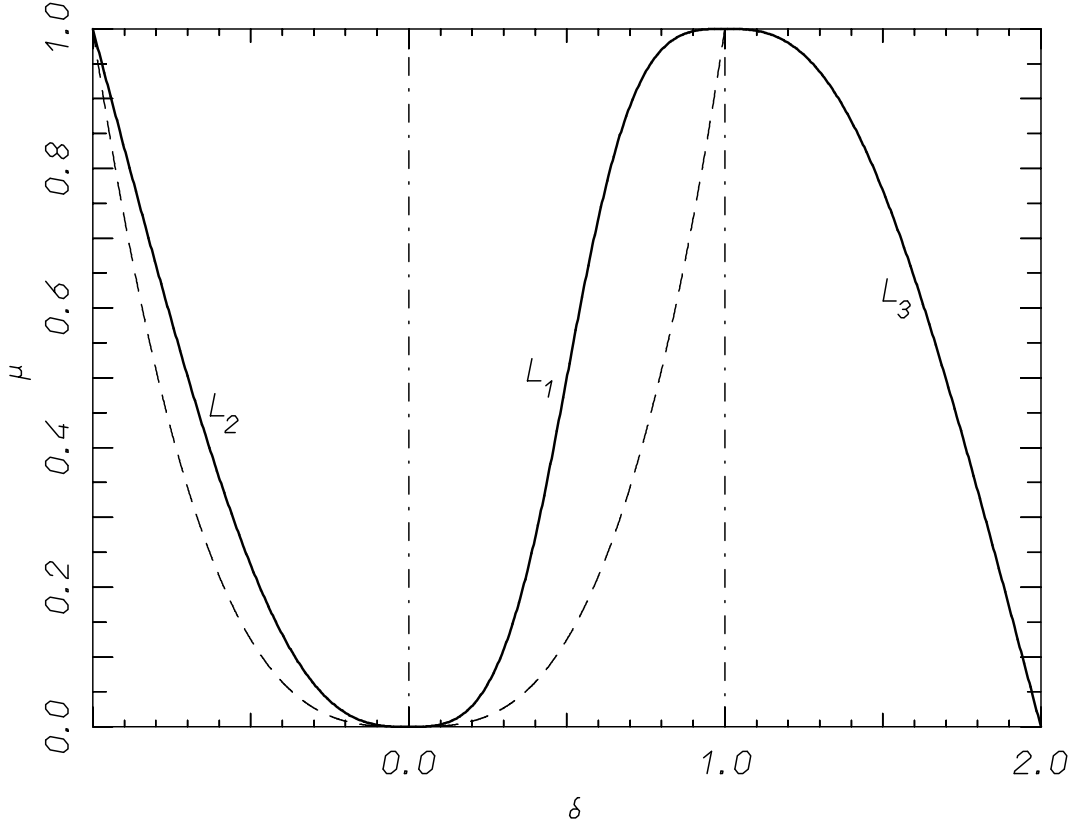
Il grafico di  $\mu$  in funzione di  $\delta$  è riportato in figura 7.10.<sup>19</sup>

Il lettore osserverà che la soluzione trovata ci dà  $\mu$  come funzione di  $\delta$ , e non, come sarebbe stato più desiderabile,  $\delta$  oppure  $x$  come funzione di  $\mu$ . Tuttavia la forma stessa delle equazioni lascia intendere che invertire le funzioni è laborioso, perché si tratta di risolvere equazioni algebriche almeno di quarto grado. È però interessante calcolare, anche in modo approssimato, la posizione dei punti  $L_1$  e  $L_2$  per valori piccoli di  $\mu$ , che è il caso di interesse per la dinamica planetaria. A tal fine si può procedere a sviluppare in serie di potenze le (7.41) e (7.42) nell'intorno di  $\delta = 0$ , e si ottiene, rispettivamente,

$$\mu = 3\delta^3 + 3\delta^4 + 4\delta^5 + O(\delta^6)$$

---

<sup>19</sup> Secondo la convenzione che  $\mu$  sia la più piccola tra le masse dei primari si dovrebbe considerare solo l'intervallo  $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$ . Tuttavia le formule sono valide per tutti i valori di  $\mu$ . Il lettore osserverà subito che il grafico è simmetrico rispetto al punto  $\delta = \frac{1}{2}$ ,  $\mu = \frac{1}{2}$ .



**Figura 7.10.** La posizione punti di equilibrio collineari rispetto ai primari al variare del parametro  $\mu$  nell'intervallo  $[0, 1]$  (in ordinate). Le curve continue danno le posizioni dei tre punti di equilibrio lagrangiani. Le curve tratteggiate sono il grafico della funzione  $\mu = |\delta|^3$ , che sarà utile più avanti, nel paragrafo 7.3.6, per discutere la stabilità degli equilibri. I segmenti verticali in tratto-punto rappresentano le posizioni dei primari.

per il punto  $L_1$ , e

$$\mu = -3\delta^3 - 3\delta^4 - 4\delta^5 + O(\delta^6)$$

per il punto  $L_2$ . Le due ultime equazioni si possono risolvere in serie di potenze di  $\mu^{1/3}$ , e nell'approssimazione che abbiamo scelto per lo sviluppo otteniamo, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{3^{1/3}}{3}\mu^{1/3} - \frac{3^{2/3}}{9}\mu^{2/3} - \frac{1}{27}\mu + O(\mu^{4/3}) \quad \text{per } \delta \geq 0, \quad \text{punto } L_1, \\ \delta &= -\frac{3^{1/3}}{3}\mu^{1/3} - \frac{3^{2/3}}{9}\mu^{2/3} + \frac{1}{27}\mu + O(\mu^{4/3}) \quad \text{per } \delta < 0, \quad \text{punto } L_2. \end{aligned}$$

Si noti bene che occorre scrivere due sviluppi distinti a seconda del segno.

### 7.3.5 Equilibri triangolari

Poniamo ora nella seconda delle (7.37)

$$(7.44) \quad 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 .$$

Allora la prima delle (7.37) si riduce a  $\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} = 0$ , il che implica  $r_1 = r_2$ . Per sostituzione nella (7.44) si trova allora  $r_1 = r_2 = 1$ , il che significa che i punti di equilibrio si devono trovare sull'intersezione di due circonferenze di raggio unitario centrate nei primari. Si ottengono dunque due punti distinti, ciascuno dei quali è collocato, assieme ai primari, ai vertici di un triangolo equilatero. Le coordinate dei punti ed i rispettivi momenti sono

$$x = -\frac{1}{2} + \mu , \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} , \quad p_x = -y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} , \quad p_y = x = -\frac{1}{2} + \mu .$$

Si denotano rispettivamente con  $L_4$  e  $L_5$  la soluzione con  $y > 0$  e con  $y < 0$ .

### 7.3.6 La stabilità dei punti di equilibrio lagrangiani

Lo studio della stabilità inizia necessariamente con l'approssimazione lineare delle equazioni nell'intorno di un punto di equilibrio, come discusso nel paragrafo 3.1. Anticipiamo fin d'ora che il problema della stabilità non lineare dei punti triangolari è questione alquanto difficile, ed a tutt'oggi irrisolta.

Iniziamo dunque col calcolo della matrice Jacobiana dei secondi membri delle equazioni (7.35). Eseguendo le derivate necessarie si ottiene la matrice

$$(7.45) \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ A & C & 0 & 1 \\ C & B & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$(7.46) \quad \begin{aligned} A &= -\frac{1-\mu}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu}{[(x+1-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} \\ &\quad + \frac{3(1-\mu)(x-\mu)^2}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{5/2}} + \frac{3\mu(x+1-\mu)^2}{[(x+1-\mu)^2 + y^2]^{5/2}} \\ B &= -\frac{1-\mu}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu}{[(x+1-\mu)^2 + y^2]^{3/2}} \\ &\quad + \frac{3(1-\mu)y^2}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{5/2}} + \frac{3\mu y^2}{[(x+1-\mu)^2 + y^2]^{5/2}} \\ C &= \frac{3(1-\mu)y(x-\mu)}{[(x-\mu)^2 + y^2]^{5/2}} + \frac{3\mu y(x+1-\mu)}{[(x+1-\mu)^2 + y^2]^{5/2}} \end{aligned}$$

Conviene anche scrivere una volta per tutte il polinomio caratteristico (denotando con  $I$  la matrice identità)

$$(7.47) \quad \det(J - \lambda I) = \lambda^4 + (2 - A - B)\lambda^2 + (A + 1)(B + 1) - C^2 .$$

Occorre ora sostituire in questo polinomio le coordinate dei punti di equilibrio, e calcolarne le radici. Si otterrà così la caratterizzazione lineare degli equilibri. Anche qui discutiamo separatamente gli equilibri collineari e quelli triangolari.

### 7.3.7 Stabilità dei punti collineari

Osserviamo subito che basta studiare la stabilità dei punti  $L_1$  ed  $L_2$ , permettendo a  $\mu$  di assumere qualunque valore nell'intervallo aperto  $(0, 1)$ . Ciò è dovuto alla simmetria: studiare la stabilità del punto  $L_3$  per un dato  $\mu$  è equivalente a studiare la stabilità di  $L_2$  per  $1 - \mu$ .

Poiché  $y = 0$  otteniamo subito, per sostituzione nella (7.46),

$$(7.48) \quad B = -\frac{1 - \mu}{|x - \mu|^3} - \frac{\mu}{|x + 1 - \mu|^3} , \quad A = -2B , \quad C = 0 .$$

Possiamo anche introdurre nuovamente il parametro  $\delta = x + 1 - \mu$ , come abbiamo fatto nella (7.39), e scrivere

$$(7.49) \quad B = -\frac{1 - \mu}{|\delta - 1|^3} - \frac{\mu}{|\delta|^3} .$$

Per lo studio della stabilità dobbiamo scrivere l'equazione caratteristica nella forma

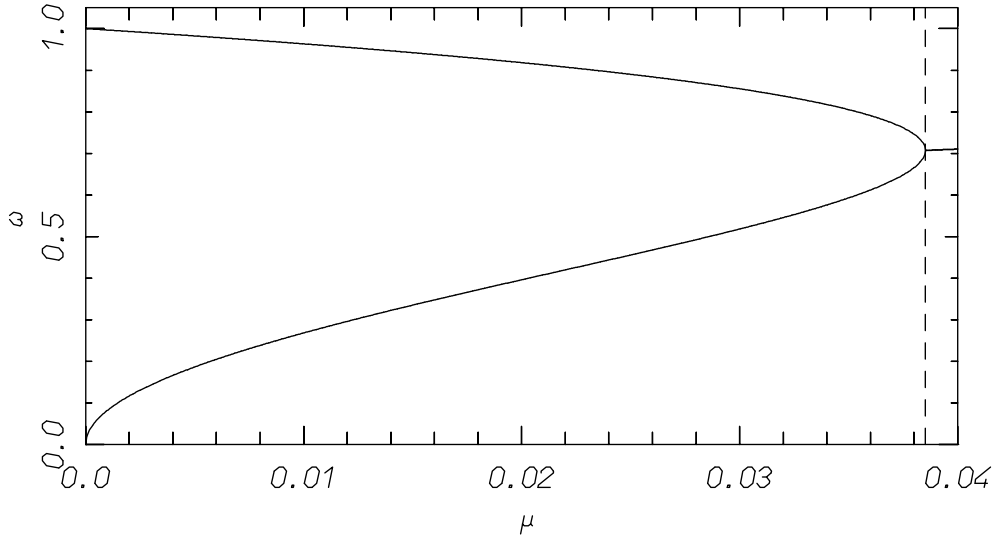
$$\lambda^4 + (B + 2)\lambda^2 - (2B - 1)(B + 1) = 0 .$$

Nell'espressione (7.49) di  $B$  dobbiamo ora sostituire i valori di  $\mu$  e  $\delta$  che corrispondono agli equilibri, ossia quelli legati tra loro dalle relazioni (7.40) per  $L_1$  e (7.41) per  $L_2$ .

Veniamo alla discussione dell'equazione caratteristica, che è di fatto un'equazione biquadratica, e consideriamo  $\lambda^2$  come incognita. Mostriamo che *l'equazione caratteristica per  $L_1$  e  $L_2$  ammette due radici  $-\omega^2$ ,  $\lambda^2$  reali e di segno opposto per tutti i valori di  $\mu \in (0, 1)$* . A tal fine basta mostrare che l'ordinata all'origine del polinomio caratteristico è negativa, ovvero che  $-(2B - 1)(B + 1) < 0$ . Infatti, dalla (7.49) si evince che ambedue i termini che contribuiscono a  $B$  danno contributo negativo, e basta mostrare che vale certamente  $\mu/|\delta|^3 > 1$ . Per piccoli valori di  $|\delta|$  ciò è vero, essendo per le (7.40) e (7.41)  $\mu = 3|\delta|^3 + O(|\delta|^4)$ . Per mostrare che la stessa disuguaglianza vale su tutto l'intervallo  $|\delta| < 1$  occorre un calcolo più laborioso, essendo necessario esaminare il comportamento di polinomi di grado elevato. Tuttavia si può ricorrere al calcolo numerico, ed osservare il grafico della figura 7.10 ove è riportato in tratteggio il grafico della funzione  $|\delta|^3$ , che giace sempre al di sotto del grafico di  $\mu(\delta)$ .

Possiamo così concludere che *per tutti i  $\mu \in (0, 1)$  i punti collineari del problema ristretto circolare dei tre corpi nell'approssimazione lineare ammettono una coppia di autovalori  $i\omega$ ,  $-i\omega$  immaginari puri, ed una coppia di autovalori  $\lambda$ ,  $-\lambda$  reali*. Alla luce della discussione svolta nel capitolo 3 il sistema lineare può rappresentarsi come il prodotto di un centro con una sella, ed è dunque instabile. Ciò è sufficiente per concludere che anche il sistema non lineare è instabile.





**Figura 7.11.** Le due frequenze di oscillazione  $\omega_1, \omega_2$  in prossimità dei punti di equilibrio triangolari  $L_4$  e  $L_5$  per  $0 \leq \mu \leq \mu^* \simeq 0.0385208965$ . La retta tratteggiata verticale corrisponde al valore  $\mu^*$ .

### 7.3.8 Stabilità dei punti triangolari

Qui restringeremo il nostro studio a valori di  $\mu$  nell'intervallo  $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ , che basta per discutere il problema in modo completo. Occorre anzitutto sostituire nelle espressioni  $A, B, C$  date dalle (7.46) le coordinate degli equilibri che abbiamo ricavato nel paragrafo 7.3.5, ossia  $x = -\frac{1}{2} + \mu$ ,  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Otteniamo

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{5}{4}, \quad C = \pm \left( \frac{3\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right),$$

dove il segno positivo e negativo si applicano rispettivamente ai punti  $L_4$  ed  $L_5$ . Sostituendo nell'equazione (7.47) otteniamo per ambedue i punti

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0,$$

che è ancora un'equazione biquadratica. Otteniamo

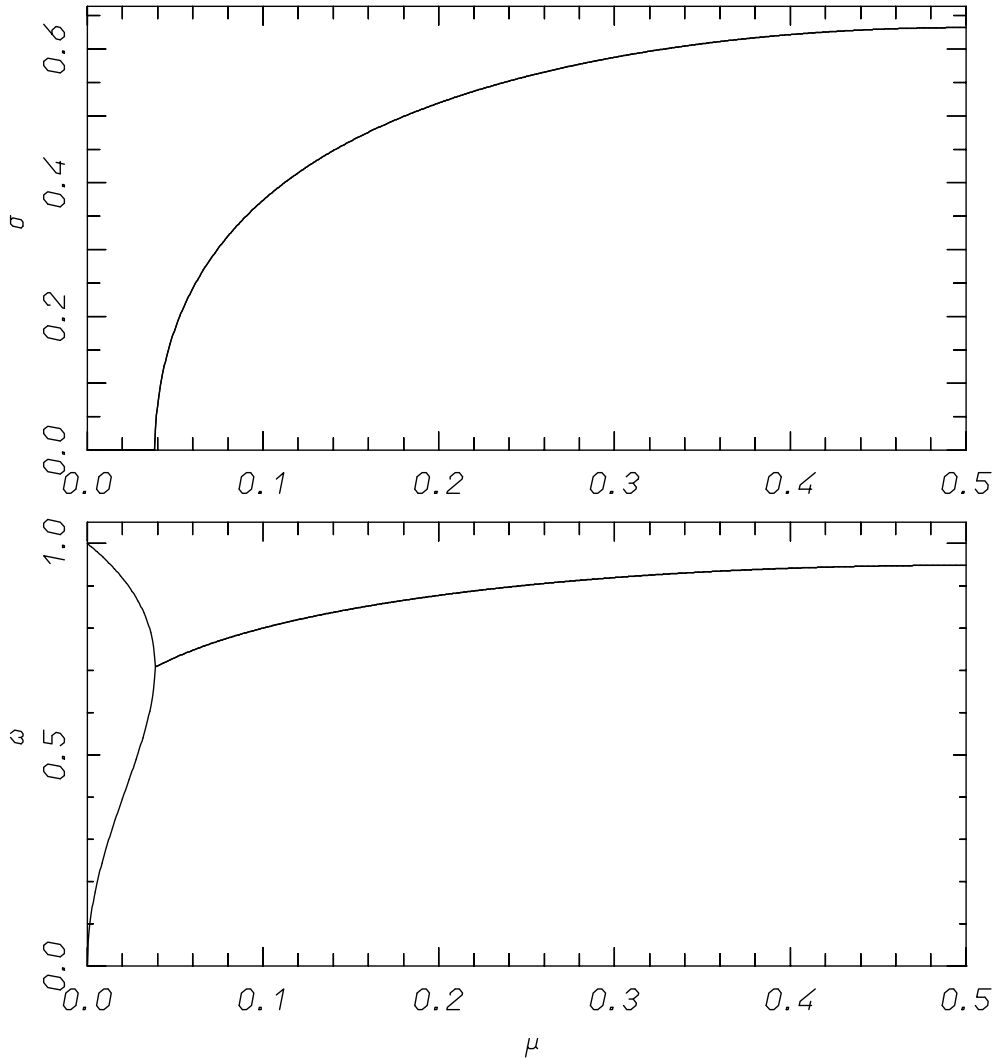
$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}.$$

L'esame del segno del discriminante  $\Delta = 1 - 27\mu(1-\mu)$  ci permette di distinguere due casi.

Per

$$(7.50) \quad 27\mu(1-\mu) < 1, \quad \mu < \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \simeq 0.0385208965.$$

l'equazione in  $\lambda^2$  ha due radici reali ed ambedue negative. Di conseguenza il sistema linearizzato ammette due coppie di autovalori  $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$  immaginari puri.



**Figura 7.12.** La parte reale  $\sigma$  (sopra) e la parte immaginaria  $\omega$  (sotto) degli autovalori dell'equazione caratteristica in prossimità dei punti  $L_4$  e  $L_5$ . Per  $\mu < \mu^* \simeq 0.0385208965$  gli autovalori sono immaginari puri, e si hanno due frequenze  $\omega_1, \omega_2$  distinte, come illustrato in modo più dettagliato in figura 7.11. Per  $\mu > \mu^*$  gli autovalori hanno la forma  $\pm\sigma \pm i\omega$ .

Nell'approssimazione lineare il sistema può rappresentarsi come il prodotto di due centri, e la dinamica è una combinazione di due oscillazioni di frequenze

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}} , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}} .$$

Il sistema è dunque stabile nell'approssimazione lineare. Il grafico delle frequenze in funzione di  $\mu$  è riportato in figura 7.11.

Per  $27\mu(1 - \mu) > 1$ , ovvero  $\mu > \mu^*$ , l'equazione in  $\lambda^2$  ha due radici complesse coniugate, con parte reale negativa. L'equazione caratteristica ha quattro autovalori

della forma  $\pm\sigma \pm i\omega$ , con

$$\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{27\mu(1-\mu)} - 1}, \quad \omega = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{27\mu(1-\mu)} + 1}.$$

Nell'approssimazione lineare lo spazio delle fasi si decompone nel prodotto di due piani corrispondenti alle coppie di autovalori  $\sigma \pm i\omega$  e  $-\sigma \pm i\omega$ . La dinamica sul primo piano è quella di un fuoco instabile; quella sul secondo piano è un fuoco stabile. Il punto di equilibrio è instabile nell'approssimazione lineare, e ciò è sufficiente per concludere che il sistema non lineare è anch'esso instabile.

La figura 7.12 riporta in sintesi il comportamento delle parti reali ed immaginarie degli autovalori dell'equazione caratteristica per tutto l'intervallo  $0 \leq \mu \leq 1/2$ .

Concludiamo dunque che *i punti di equilibrio triangolari del problema ristretto dei tre corpi sono stabili in approssimazione lineare per  $\mu < \mu^*$  dato dalla (7.50).*

La stabilità lineare non implica però la stabilità del sistema completo delle equazioni non lineari. I metodi classici di studio della stabilità degli equilibri, quali il teorema di Lyapounov 3.9, che abbiamo visto nel paragrafo 3.4.3, oppure il teorema di Dirichlet–Lagrange 8.2, che vedremo più avanti nel paragrafo 8.2.2 non sono applicabili a questo caso.

Solo negli ultimi cinquant'anni si sono ottenuti risultati interessanti, anche se non conclusivi. Alcuni di questi si collocano nell'ambito della cosiddetta *teoria KAM*, da Kolmogorov, Arnold e Moser, e garantiscono che la maggior parte delle orbite, nel senso della misura di Lebesgue, resta eternamente confinata in prossimità dell'equilibrio, ma non possono garantire che ciò sia vero per tutte le orbite. Altri risultati prendono spunto dalla teoria di stabilità esponenziale di Nekhoroshev, che garantisce il confinamento delle orbite per tempi molto lunghi che possono anche superare l'età dell'universo, ma non assicurano la stabilità perpetua. Si può ben dire dunque che il problema della stabilità dei punti triangolari di Lagrange resta ancora aperto.

